Geometrische Charakterisierung von Veronesemannigfaltigkeiten

Von der
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte
Dissertation

von
Oliver Krauß
geboren am 11.11.1980
in Braunschweig

Eingereicht am: 30.09.2013
Disputation am: 03.02.2014
1. Referent: Prof. Dr. Rainer Löwen
2. Referent: Prof. Dr. Hendrik Van Maldeghem

2014

Mein Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Rainer Löwen, der mir viel Geduld entgegen brachte und mit wertvollen inhaltlichen, methodischen und persönlichen Ratschlägen für das Gelingen meiner Arbeit sorgte.

Herrn Prof. Dr. Hendrik Van Maldeghem danke ich für seine Unterstützung meiner Arbeit und insbesondere für zwei sehr lehrreiche Aufenthalte in Gent.

Ich danke allen, die mir mit Korrekturlesen, fachlichen Gesprächen und viel Verständnis zur Seite standen.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir Veronesemannigfaltigkeiten als $(n, k)-$Caps und diese als Ovoidräume charakterisieren. Daher beginnen wir mit einer Betrachtung, was Veronesemannigfaltigkeiten sind. Eine vollständige Definition befindet sich in Abschnitt 3.3.

1.1. Was ist eine Veronesemannigfaltigkeit?

Gegeben seien ein Körper $\mathbb{K}$ und zwei natürliche Zahlen $i, k \geq 2$, sowie eine geeignete $(k-1)-$dimensionale, alternative $\mathbb{K}-$Divisonsalgebra $\mathbb{F}$. (Als ein Standardbeispiel stellen wir uns $\mathbb{K}$ als die reellen Zahlen und $\mathbb{F}$ als die hamiltonschen Quaternionen vor.) Dann gibt es einen projektiven Raum $P_i\mathbb{F}$ der Dimension i über $\mathbb{F}$. Wir bilden diesen Raum mit der Veroneseabbildung in einen projektiven Raum $P_n\mathbb{K}$ über $\mathbb{K}$ ab, wobei wir dessen Dimension aus k und i mit $n = N(i, k) := \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i$ berechnen. Dabei werden Punkte aus $P_i\mathbb{F}$ nach einer algebraischen Vorschrift auf Punkte in $P_n\mathbb{K}$ und Geraden aus $P_i\mathbb{F}$ auf $(k-1)-$dimensionale Ovoide in $P_n\mathbb{K}$ abgebildet. Die genaue Definition der Veroneseabbildung findet sich in Abschnitt 3.3. Das Bild von $P_i\mathbb{F}$ nennen wir die von $\mathbb{F}$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit in $P_n\mathbb{K}$.
Eine Veronesemannigfaltigkeit ist nach Konstruktion ein projektiver Raum, dessen Punktmenge in einem anderen projektiven Raum enthalten ist. Betrachten wir nun einen beliebigen projektiven Raum, dessen Punktmenge einen desarguesschen projektiven Raum $P_n\mathbb{K}$ mit $n \geq N(i, k)$ erzeugt und dessen Geraden Ovoide der Dimension $k-1$ in $P_n\mathbb{K}$ sind. In den Fällen $k \in \{2, 3\}$ wurde von H. Van Maldeghem und J. Schillewaert in [**SM1**] und [**SM2**] gezeigt, dass jeder derartige projektive Raum das Bild einer Veronesemannigfaltigkeit unter einer bestimmten Abbildung (Äquivalenz oder Zentralprojektion) ist. Ziel dieser Arbeit ist es, eine ähnliche Charakterisierung von Veronesemannigfaltigkeiten mit größeren k zu erreichen. Wie auch in [**SM2**] ist der entscheidende Schritt Veronesemannigfaltigkeiten als $(n, k)-$Caps zu charakterisieren. Der erste Schritt dabei ist es, den Begriff $(n, k)-$Cap zu definieren, was wir in Definition 3.1.1 erreicht haben werden. Hier geben wir nur einen ersten Überblick:

1.2. Was ist ein $(n, k)-$Cap?

Der zweite Gegenstand dieser Arbeit sind $(n, k)-$Caps. Ein $(n, k)-$Cap ist eine Geometrie, also ein Tripel aus einer Punktmenge X, einer Menge von Blöcken und einer Inzidenzrelation, die in einen projektiven $n-$Raum eingebettet ist und die wesentlichen geometrischen Eigenschaften einer Veronesemannigfaltigkeit besitzt. Die Blöcke sind Ovoide der Dimension $k-1$

und entsprechen den Bildern von Geraden des $P_i\mathbb{F}$ in der Veronesemannigfaltigkeit.
Der Aufspann eines Blockes ist ein $k-$Raum und wird elliptischer Raum genannt. Sei Ξ die Menge der elliptischen Räume. Dann ist das Paar (X,Ξ) ein $(n,k)-$Cap, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(C1) Je zwei Punkte $x, y \in X$ sind in einem eindeutig bestimmten elliptischen Raum enthalten.
(C2) Der Schnitt zweier elliptischer Räume ist in X enthalten.
(C3) Für $x \in X$ und $\xi \in \Xi$ mit $x \notin \xi$ sind alle Tangentialräume $T_x(\xi(x,y) \cap X)$ mit $y \in X \cap \xi$ in einem gemeinsamen $(2k-2)$-dimensionalen Unterraum $T(x,\xi)$ enthalten.

Wir wollen in Kapitel 4 Veronesemannigfaltigkeiten bis auf Äquivalenz als $(n,k)-$Caps charakterisieren. Dafür ist es wichtig, den Unterschied zwischen Isomorphie von $(n,k)-$Caps als Inzidenzgeometrien und Äquivalenz von $(n,k)-$Caps zu verstehen. Wir nennen zwei $(n,k)-$Caps äquivalent, wenn es eine Kollineation zwischen den umgebenden Räumen gibt, die das eine $(n,k)-$Cap auf das andere abbildet. Dies ist im allgemeinen stärker, als nur zu fordern, dass die $(n,k)-$Caps als Geometrien isomorph sind.

Aus den Axiomen eines $(n,k)-$Caps folgern wir mit Proposition 4.2.2, dass es sich um einen projektiven Raum handelt, dessen Geraden Ovoide sind.
Das motiviert uns dazu, in Kapitel 5 zu fragen, welche projektiven Räume, deren Geraden Ovoide sind, auch $(n,k)-$Caps sind. Wir nennen einen projektiven Raum der Dimension i, dessen Punktmenge eine aufspannende Teilmenge eines desarguesschen projektiven Raumes $P_n\mathbb{K}$ ist, und dessen Geraden $(k-1)$ dimensionale Ovoide in einem projektiven Raum $P_n\mathbb{K}$ sind, einen $(n,k)-$Ovoidraum vom Index i. Wir lernen zwei spezielle Typen von Ovoidräumen kennen, bei denen es sich immer um $(n,k)-$Caps handelt.
In den Fällen $k \in \{2,3\}$ wurde von H. Van Maldeghem und J. Schillewaert in **[SM2]** gezeigt, dass alle $(n,k)-$Ovoidräume mit $n \geq N(i,k)$ bereits $(n,k)-$Caps sind. In diesen Fällen können wir $(n,k)-$Ovoidebenen, also Ovoidräume vom Index 2, selbst durch einen noch abstrakteren Begriff charakterisieren. Dazu lernen wir in Kapitel 6 Beschreibungen von $(n,k)-$Ovoidebenen kennen, die ausschließlich das Schnittverhalten mit Unterräumen des umgebenden Raumes verwenden.

1.3. Charakterisierungen von Veronesemannigfaltigkeiten als $(n,k)-$Caps

Wir wollen zeigen, dass $(n,k)-$Caps äquivalent zu Veronesemannigfaltigkeiten sind. Dies ist bisher nicht für beliebige $(n,k)-$Caps gezeigt, aber für einige Fälle. Es gibt Voraussetzungen an die Parameter n, k und solche an den Grundkörper $\mathbb{K}$ oder an die Geometrie des $(n,k)-$Caps. Sei in diesem Abschnitt (X,Ξ) ein $(n,k)-$Cap mit Grundkörper $\mathbb{K}$ mit mindestens vier Elementen und Charakteristik ungleich zwei. Um allgemeine Ergebnisse zu erzielen, greifen wir oft auf bereits bekannte Ergebnisse zurück. Daher wollen wir einen kurzen Überblick geben über die bereits gelösten Fälle und wie sie die Ergebnisse dieser Arbeit beeinflussen.

1.3.1. Der Fall 2<Index<∞. Es lässt sich zeigen, dass für größere Indizes ein $(n,k)-$Cap (X,Ξ) genau dann eine Veronesemannigfaltigkeit ist, wenn die zweidimensionalen Unterräume des projektiven Raumes (X,Ξ), bei denen es sich um $(n',k)-$Caps vom Index 2 handelt, Veronesemannigfaltigkeiten sind. Den Beweis erbringen wir mit Satz 4.8.15. Dabei folgen wir der Argumentation von B.N. Cooperstein, J.A. Thas und H. Van Maldeghem in **[CTM]**. Dabei behandeln wir einige technische Schwierigkeiten, die durch das Weglassen der in **[CTM]** verwendeten Voraussetzungen $k \leq 3$ und $|\mathbb{K}| < \infty$ entstehen. Mit diesem Ergebnis reicht es also, nur den Fall Index 2 zu betrachten.

1.3.2. Der endliche Fall. In **[CTM]** wird von B.N. Cooperstein, J.A. Thas und H. Van Maldeghem für $k \in \{2,3\}$ und $|\mathbb{K}| < \infty$ gezeigt, dass isomorphe $(n,k)-$Caps äquivalent sind, und dass $(n,k)-$Caps Moufangebenen sind. Da es im endlichen Fall bis auf Isomorphie nur eine Moufangebene einer Mächtigkeit gibt und die passende Veronesemannigfaltigkeit ein $(n,k)-$Cap ist, ist damit jedes Cap zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent.
Die Eigenschaft, dass sich Isomorphismen zu Äquivalenzen fortsetzen lassen, nennen wir den *Fortsetzungssatz*. Um den Fortsetzungssatz im endlichen Fall zu beweisen, werden die Baer-Unterebenen identifiziert. Dass Isomorphismen Baer-Unterebenen auf Baer-Unterebenen abbilden, wird im Beweis verwendet.

1.3.3. Der Fall $k = 2$. In diesem Fall wurde bereits von H. Van Maldeghem und J. Schillewaert in **[SM1]** gezeigt, dass (X,Ξ) äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit ist.
Dieser Fall spielt in den Fällen mit größerem k eine besondere Rolle, da es uns gelingt, in beliebigen $(n,k)-$Caps spezielle $(5,2)-$Caps zu finden, die als *generische Untercaps* eine hohe Bedeutung haben. Auf diese generischen Untercaps wenden wir die Ergebnisse des Falles $k = 2$ direkt an.

1.3.4. Der Fall $k = 3$. Auch in diesem Fall wurde bereits von H. Van Maldeghem und J. Schillewaert in **[SM2]** gezeigt, dass (X,Ξ) äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit ist.
Für den Beweis werden die Blöcke des projektiven Raumes (X,Ξ) näher betrachtet:
Es wird gezeigt, dass die Blöcke von (X,Ξ) äquivalent zu den Blöcken einer Veronesemannigfaltigkeit sind.

1.3.5. Der Oktavenfall. Falls (X,Ξ) nicht-desarguessch ist, $k \leq 9$ und $|\mathbb{K}| > 3$ gilt, zeigen wir in dieser Arbeit, dass (X,Ξ) äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit und $k = 9$ ist.
Der Beweis verläuft ähnlich wie der im endlichen Fall. Auch hier zeigen wir, dass $(n,k)-$Caps Moufangebenen sind. Da die einzigen nicht-desarguesschen Moufangebenen Oktavenebenen sind, wissen wir, dass (X,Ξ) eine projektive Ebene über einer Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ ist.
Wir können hier den Fortsetzungssatz nicht mit Baer-Unterebenen beweisen, sondern konstruieren generische Untercaps, die im Beweis die Rolle der Baer-Unterebenen einnehmen. Generische Untercaps sind Untercaps des $(n,k)-$Caps, die von einer geeigneten Zentralprojektion isomorph auf Ebenen des $P_n\mathbb{K}$ abgebildet werden. Diese liefern die entscheidende Verbindung der Geometrien des $(n,k)-$Caps und des umgebenden Raumes. Außerdem sind sie

$(5,2)-$Caps, und somit nach [**SM1**, Theorem 2.2] äquivalent zu einer quadratischen Veronesemannigfaltigkeit. Generische Untercaps sind auch im Quaternionenfall ein wichtiges Hilfsmittel. Im Oktavenfall ist ihre wichtigste Verwendung der Fortsetzungssatz (vergleiche Satz 4.4.5), der besagt, dass sich ein Isomorphismus genau dann zu einer Äquivalenz fortsetzen lässt, wenn er generische Untercaps auf generische Untercaps abbildet.
Nun können wir zeigen, dass $\mathbb{K}$ der Kern von $\mathbb{O}$ ist und daraus folgern, dass jeder Isomorphismus generische Untercaps auf generische Untercaps abbildet. Weil (X,Ξ) zur Veronesemannigfaltigkeit über $\mathbb{O}$ isomorph ist, ist damit unsere Behauptung bewiesen.
Im Gegensatz zum Beweis des Fortsetzungssatzes in [**CTM**], werden wir hier größere Teile des Beweises in verschiedene Lemmata auslagern. Das dient unter anderem dazu, einige Argumente auch für den Beweis des Äquivalenzsatzes im Quaternionenfall verwenden zu können.

1.3.6. Der Quaternionenfall. Falls $k=5$ ist, $|\mathbb{K}|>3$ gilt, $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen und Charakteristik ungleich 2 hat, zeigen wir in dieser Arbeit, dass (X,Ξ) eine desarguessche projektive Ebene über einer Algebra $\mathbb{F}$ über $\mathbb{K}$ ist. Wir zeigen, dass die Blöcke von (X,Ξ) äquivalent zu denen der Veronesedarstellung von $P_2\mathbb{F}$ in $P_n\mathbb{K}$ sind und folgern daraus die Äquivalenz der $(n,5)-$Caps. Wir betrachten zuerst nur den Fall Index 2.

1.3.6.1. *Bestimmung der Gleichung eines Blockes.* Zuerst zeigen wir, dass jeder Block L eine nicht ausgeartete Quadrik ist. Daher finden wir im $5-$Raum $\langle L\rangle$ zwei Punkte $x,y\in L$ und vier Punkte $a,b,c,d\in\langle L\rangle\backslash L$, die paarweise zueinander und zu x,y orthogonal bezüglich L sind. Wir wählen die Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{K}^6$ als Koordinatenvektoren dieser 6 Punkte. Damit ist die Matrix von L bis auf einen $2\times 2-$Block eine Diagonalmatrix. Durch Normierung der Matrix und Wahl der Koordinaten eines geeigneten siebten projektiven Basispunktes erhalten wir für L die Gleichung $x_4x_5=x_0^2+w_1x_1^2+w_2x_2^2+w_3x_3^2$, mit nicht näher bestimmten $w_1,w_2,w_3\in\mathbb{K}$. Eine geeignete $4-$dimensionale $\mathbb{K}-$Algebra, die eine Veronesemannigfaltigkeit mit Blöcken dieser Gleichung induziert, existiert jedoch nur, wenn w_1 und w_2w_3 in der selben Quadratklasse von $\mathbb{K}$ liegen. Diese Bedingung erzwingen wir durch die Voraussetzung, dass unser Ausgangskörper $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen hat.

1.3.6.2. *Der Äquivalenzsatz.* Um unser Ziel zu erreichen, benötigen wir jetzt noch den Satz, dass zwei $(n,k)-$Caps $(X,\mathcal{L})$ und $(Y,\mathcal{M})$, deren Blöcke linear äquivalent sind, als $(n,k)-$Caps äquivalent sind. Dieser Beweis befindet sich in keiner der angegebenen Veröffentlichungen, leiht sich aber Ideen beim Beweis des Fortsetzungssatzes im endlichen Fall aus [**CTM**]. Der Beweis vollzieht sich im Wesentlichen in drei Schritten:
Zuerst werden Äquivalenzen von zwei Blöcken auf deren gemeinsamen Aufspann zu einer Kollineation α' fortgesetzt.
Dann wird ein dritter Block mit Kollineation α_3 betrachtet und eine gemeinsame Fortsetzung α von α_3 und α' konstruiert.
Im dritten Schritt wird gezeigt, dass α die $(n,k)-$Caps aufeinander abbildet, also eine Äquivalenz ist.
Der erste Schritt ist trivial. Der Zweite ist der schwerste, denn die Definitionsbereiche der beiden Kollineationen α_3 und α' schneiden sich in einer Geraden g. Da wir anders als beim Fortsetzungssatz keinen Isomorphismus auf dem ganzen $(n,k)-$Cap zur Verfügung haben, haben α_3 und α' keinerlei Veranlassung auf g übereinzustimmen. Wir können jedoch zeigen,

dass die Gruppe der linearen Automorphismen eines Blockes dreifach transitiv auf dem Block wirkt. Es gibt daher viele mögliche Kollineationen α_3, die aber alle unabhängig von α' sind. Wir müssen noch zeigen, dass es ein α_3 gibt, das auf g mit α' übereinstimmt.
Um eine solche Kollineation zu finden, beweisen wir zunächst den ganzen Äquivalenzsatz für $k = 2$ und den dritten Schritt für beliebige k.
Dann nehmen wir ein generisches Untercap η, das die Schnittpunkte der drei betrachteten Blöcke enthält, und ein generisches Untercap in unserem geplanten Bild$-(n, k)-$Cap, das ebenfalls die drei entsprechenden Schnittpunkte enthält. Dann können wir $\alpha'|_\eta$ zu einer Äquivalenz der generischen Untercaps fortsetzen. Diese wiederum können wir mit Hilfe des bereits gezeigten dritten Schrittes zu einer Äquivalenz von $(X, \mathcal{L})$ auf ein drittes $(n, k)-$Cap $(X^\alpha, \mathcal{L}^\alpha)$ fortsetzen. Die $(n, k)-$Caps $(Y, \mathcal{M})$ und $(X^\alpha, \mathcal{L}^\alpha)$ haben nun eine so große Schnittmenge, dass sich mit Hilfe der dreifachen Transitivität der Gruppe der linearen Automorphismen des dritten Blockes eine Äquivalenz konstruieren lässt.

1.3.7. Der topologische Fall. Falls (X, Ξ) eine topologische, kompakte, zusammenhängende projektive Ebene ist, muss nach [**Sa**] der Grundkörper $\mathbb{R}$ und $k \in \{2, 3, 5, 9\}$ sein. Damit lässt sich dieser Fall immer auf einen der vorherigen zurückführen, was wir mit Satz 4.7.3 beweisen werden.

1.4. Charakterisierungen von $(n, k)-$Caps

1.4.1. $(n, k)-$**Ovoidräume.** In Kapitel 5 werden $(n, k)-$Caps als $(n, k)-$Ovoidräume mit zusätzlichen Eigenschaften charakterisiert.
Auch hier wird zuerst der Fall Index 2 betrachtet und das Ergebnis dann mit Satz 3.4.5 auf größere Indizes übertragen. Im Fall Index 2 haben wir es mit $(n, k)-$Ovoidebenen zu tun. Das sind Ebenen, die so in den $P_n\mathbb{K}$ eingebettet sind, dass ihre Geraden Ovoide der Dimension $k - 1$ sind. Diese Ovoide bezeichnen wir auch hier als Blöcke, um sie sprachlich von Geraden des $P_n\mathbb{K}$ zu unterscheiden.
Im Fall $k = 2$ wurde in [**SM1**] und für $k = 3$ in [**SM2**] gezeigt, dass alle $(n, k)-$Ovoidebenen, die $n \geq N(i, k) := \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i$ erfüllen, $(n, k)-$Caps sind.
Wir lernen zwei Typen von $(n, k)-$Ovoidebenen kennen, die $(n, k)-$Caps sind:

1.4.1.1. $(n, k)-$*Ovoidebenen, die (C2) erfüllen.* Wir betrachten solche $(n, k)-$Ovoidebenen, die bereits das zweite Axiom für $(n, k)-$Caps erfüllen. Das Axiom (C2) besagt, dass sich die Aufspanne zweier Blöcke in höchstens einem Punkt schneiden. Solche $(n, k)-$Ovoidebenen sind $(n, k)-$Caps. Der Beweis dieses Aussage verläuft ähnlich zu den Beweisen in [**SM2**] und [**TM2**]. Diesen Satz können wir auch in Kapitel 4 gelegentlich anwenden, indem wir mit diesem Satz zeigen, dass gewisse Unterstrukturen eines $(n, k)-$Caps Untercaps sind.

1.4.1.2. *Normale $(n, k)-$ Ovoidebenen.* Dann betrachten wir solche $(n, k)-$Ovoidebenen, die die Eigenschaft haben, dass drei sich nicht in einem Punkt schneidende Blöcke mindestens eine Hyperebene erzeugen und dass der Aufspann eines Blockes keine weiteren Punkte der $(n, k)-$Ovoidebene enthält. Beide Axiome werden im Fall $k = 3$ von jeder $(n, k)-$Ovoidebene erfüllt. Der Beweis hierfür kann jedoch auf größere k nicht übertragen werden.
Wie in [**SM2**] und [**TM2**] zeigen wir, dass normale $(n, k)-$Ovoidebenen $(n, k)-$Caps sind, indem wir zeigen, dass normale $(n, k)-$Ovoidebenen (C2) erfüllen, also dass sich die Aufspanne zweier Blöcke in nur einem Punkt schneiden.
In [**TM2**] wird ein endlicher Grundkörper vorausgesetzt und diese Voraussetzung in Form eines Teilbarkeitsargumentes [**TM2**, Lemma 3.2] genutzt. In [**SM2**] wird der Fall $k = 3$ betrachtet und das Teilbarkeitsargument durch ein Dimensionsargument [**SM2**, Lemma 6.3 und 6.4] ersetzt, das bei $k > 3$ so nicht verwendet werden kann.
Wir lösen das Problem mit Hilfe der neuen Axiome, indem wir zuerst in Lemma 5.2.11 zeigen, dass es einen Punkt $b \in X$ gibt, so dass der Aufspann zweier Blöcke, die sich nicht in b schneiden, $2k$-dimensional ist.
Dann betrachten wir eine Zentralprojektion deren Zentrum der Aufspann eines Blockes ist, der b nicht enthält. Die Einschränkung dieser Zentralprojektion auf die Punktmenge der Ovoidebene muss injektiv sein. Diese Aussage führt zu einem Widerspruch zu der Existenz von zwei Blöcken, deren Aufspanne sich in mehr als einem Punkt schneiden. Damit ist gezeigt, dass sich die Aufspanne zweier Blöcke in genau einem Punkt schneiden.

1.4.2. Charakterisierung durch Schnitte. In Kapitel 6 gehen wir noch einen Schritt weiter und charakterisieren $(n, k)-$Ovoidebenen. Dies tun wir, indem wir ihr Schnittverhalten mit Unterräumen des umgebenden Raumes betrachten und so äquivalente Definitionen für $(n, k)-$Ovoidebenen erhalten. Hier werden nur die Fälle $k \in \{2, 3\}$ behandelt, allerdings für beliebige Körper mit von zwei verschiedener Charakteristik.
Das Kapitel 6 verallgemeinert in gewisser Weise [**TM2**, Theorem 2.3], in dem Veronesemannigfaltigkeiten durch die Mächtigkeit ihrer Schnitte mit Hyperebenen charakterisiert werden. Wenn der Grundkörper nicht endlich ist, sind es die nicht-trivialen Schnitte von $(n, k)-$Caps mit Hyperebenen auch nicht. Daher lässt sich [**TM2**, Theorem 2.3] nicht direkt übertragen, wir finden jedoch andere Beschreibungen des Schnittverhaltens von $(n, k)-$Caps, die wir zur Charakterisierung von $(n, k)-$Caps verwenden können.

KAPITEL 2

Grundlegendes

In diesem Kapitel fassen wir einige bekannte Begriffe und Sätze zusammen. Wir behandeln Grundlagen, die sich so oder so ähnlich in vielen Lehrbüchern finden lassen. So wollen wir eine gemeinsame Sprache für diese Arbeit festlegen.

2.0.3. Schreibweise von Abbildungen. Seien X, Y und Z Mengen und $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ Abbildungen. Dann bezeichnen wir das Bild von $x \in X$ unter φ mit x^φ, das Bild von x^φ unter ψ entsprechend mit $x^{\varphi\psi}$. Sei M eine Teilmenge von X, dann bezeichnen wir mit M^φ das Bild von M, also die Menge $\{y \in Y \mid \exists x \in X : x^\varphi = y\}$ und mit $\varphi|_M$ die Einschränkung von φ auf M.
Für eine Matrix M bezeichnen wir mit M^T die transponierte Matrix.

2.1. Definitionen und bekannte Lemmata aus der Algebra

2.1.1. DEFINITION. Ein *Divisionsring* R ist ein Ring, in dem es zu jedem $x \in R$ ein inverses Element $x^{-1} \in R$ gibt, so dass $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ gilt. Insbesondere hat so ein Ring ein neutrales Element der Multiplikation. Die Multiplikation ist aber nicht notwendigerweise assoziativ.

2.1.2. DEFINITION. Einen assoziativen Divisionsring nennen wir *Schiefkörper*.

2.1.3. DEFINITION. Einen Divisionsring, der gleichzeitig eine Algebra über einem Körper $\mathbb{K}$ ist, nennen wir eine *Divisionsalgebra* über $\mathbb{K}$.

2.1.4. DEFINITION. Sei $\mathbb{F}$ ein Divisionsring. Wenn für alle $x, y \in \mathbb{F}$ die Gleichungen $x(xy) = x^2y$ und $(xy)y = xy^2$ gelten, heißt $\mathbb{F}$ ein *alternativer Ring*.

Nach [**HP**, Seite 139] gelten in einem alternativen Divisionsring für alle $x, y \in \mathbb{F}$ die Gleichungen $x^{-1}(xy) = y$ und $(yx)x^{-1} = y$.

2.1.5. DEFINITION. Das *Zentrum* eines Divisionsringes $\mathbb{F}$ ist die Teilmenge $Z(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}$, so dass für alle $c \in Z(\mathbb{F}), f \in \mathbb{F}$ die Gleichung $fc = cf$ gilt.

2.1.6. Definition. Der *Linksnukleus* eines Divisionsringes $\mathbb{F}$ ist die Teilmenge $N_l(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}$, so dass für alle $n \in N_l(\mathbb{F})$, $f, g \in \mathbb{F}$ die Gleichung $n(fg) = (nf)g$ gilt. Analog werden *Rechtsnukleus* und *Mittelnukleus* definiert.

2.1.1. Der Cayley-Dickson-Prozess.

Wir werden in diesem Abschnitt eine Methode kennen lernen, bestimmte Algebren über einem Körper zu konstruieren. In der Darstellung dieser als Cayley-Dickson-Prozess bekannten Methode lehnen wir uns an [**Sa**, Section 11], wo die Konstruktion ausführlich für den Fall behandelt wird, dass es sich beim Ausgangskörper um die reellen Zahlen handelt.

2.1.7. Definition. Wir definieren wie in [**Sa**] eine Folge $\mathbb{F}_m$ von Algebren über einem Grundkörper $\mathbb{K}$ mit je einem involutorischen Antiautomorphismus, den wir Konjugation nennen:
Sei $\mathbb{F}_0 := \mathbb{K}$ mit der Identität $a \mapsto \bar{a} := a$ als Konjugation.
Wir definieren induktiv für $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ die Algebra $\mathbb{F}_m$ mit der Menge $\mathbb{F}_m := \mathbb{F}_{m-1} \times \mathbb{F}_{m-1}$, den Verknüpfungen:

$$(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da),$$

und der Konjugation

$$\overline{(a, b)} := (\bar{a}, -b).$$

Die so entstandenen Algebren nennen wir *Cayley-Dickson Algebren.*

Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. Wir sammeln ein paar offensichtliche Fakten über die Cayley-Dickson-Algebra $\mathbb{F}_m$:
Mit der Inklusion $\mathbb{F}_{m-1} \hookrightarrow \mathbb{F}_m : a \mapsto (a, 0)$ ist $\mathbb{F}_{m-1}$ eine Unteralgebra von $\mathbb{F}_m$. Die Konjugation auf $\mathbb{F}_m$ erbt von der Konjugation auf $\mathbb{F}_{m-1}$ die Eigenschaften, Antiautomorphismus und Involution zu sein, und hat den Fixkörper $\mathbb{K}$.
Falls $m \geq 2$ ist, ist $\mathbb{F}_m$ nicht abelsch und $\mathbb{K}$ das Zentrum von $\mathbb{F}_m$.
Sei $(a, b) \in \mathbb{F}_m$, dann gilt $(a, b)\overline{(a, b)} = (a\bar{a} + \bar{b}b, 0) = \overline{(a, b)}(a, b) \in \mathbb{K}$ und wir defineren $\|x\|^2 := \bar{x}x$.
Jedes $x \in \mathbb{F}_m$ können wir in eine Summe $x = x_0 + x_p$ zerlegen, wobei $x_0 \in \mathbb{K}$ ist und x_p ein reines Element ist. Dass heißt x_p erfüllt die Gleichung $\overline{x_p} = -x_p$.

2.1.8. Lemma. *Wenn $\mathbb{F}_{m-1}$ assoziativ ist, ist $\mathbb{F}_m$ alternativ.*
Beweis: Seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{F}_m$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{(a, b)}((a, b)(c, d)) &= (\bar{a}, -b)(ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}) \\
&= (\bar{a}(ac - \bar{d}b) + \overline{(da + b\bar{c})}b, (da + b\bar{c})\bar{a} - b\overline{(ac - \bar{d}b)}) \\
&= (\|a\|^2 c - \bar{a}\bar{d}b + \bar{a}\bar{d}b + c\|b\|^2, d\|a\|^2 + b\bar{c}\bar{a} - b\bar{c}\bar{a} + \|b\|^2 d) \\
&= (\|a\|^2 c + \|b\|^2 c, \|a\|^2 d + \|b\|^2 d) \\
&= \|(a, b)\|^2 (c, d).
\end{aligned}$$

Das nutzen wir zum Nachrechnen der Alternativität:
Seien $x, y \in \mathbb{F}_m$. Dann können wir $x = x_0 + x_p$ mit $x_0 \in \mathbb{K}$ und $\overline{x_p} = -x_p$ setzen und erhalten:

$$\begin{aligned} x(xy) &= (x_0 + x_p)(x_0 y + x_p y) \\ &= x_0(x_0 y + x_p y) - \bar{x}_p(x_0 y + x_p y) \\ &= x_0^2 y + 2x_0 x_p y - \|x_p\|^2 y \\ &= (x_0^2 + 2x_0 x_p + x_p^2) y = x^2 y. \end{aligned}$$

Ebenso gilt: $(yx)x = (yx_0 + yx_p)(x_0 + x_p) = yx_0^2 + 2yx_0x_p - y\|x_p\|^2 = y(x_0^2 + 2x_0x_p + x_p^2) = yx^2$. □

2.1.9. Lemma. *Falls -1 in $\mathbb{K}$ kein Quadrat ist, ist $\mathbb{F}_1$ eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{K}$.*

Beweis: Offenbar gilt $(0,1)^2 = (-1,0) = -1$. Also ist $\mathbb{K}(0,1)$, die quadratische Erweiterung von $\mathbb{K}$, wegen $(0,1) \in \mathbb{F}_1$ eine Unteralgebra von $\mathbb{F}_1$. Da sowohl $\mathbb{F}_1$ als auch $\mathbb{K}(0,1)$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ der Dimension zwei sind, gilt $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}(0,1)$. □

2.1.10. Definition. Wenn $\mathbb{F}_2$ eine assoziative Divisionsalgebra mit Zentrum $\mathbb{K}$ ist, nennen wir $\mathbb{F}_2$ eine *klassische Quaternionenalgebra* über $\mathbb{K}$. Die Algebra $\mathbb{F}_3$ nennen wir dann die *klassische Oktavenalgebra* über $\mathbb{K}$.

2.2. Definitionen und bekannte Lemmata aus der Geometrie

2.2.1. Definition. Ein *projektiver Raum* ist eine Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$. Dabei ist $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ eine Inzidenzrelation so, dass die folgenden Axiome erfüllt sind:
(P1) Zu zwei Punkten $p, q \in \mathcal{P}$ existiert genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$, so dass $(p, g) \in \mathcal{I}$ und $(q, g) \in \mathcal{I}$ gelten.
(P2) Seien $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathcal{G}$, so dass sich g_1 und g_2 in einem Punkt p schneiden, die Punkte $h_i \cap g_j$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$ existieren und von p verschieden sind. Dann schneiden sich auch h_1 und h_2 in einem Punkt.
(P3) Es gibt mindestens zwei Geraden und auf jeder Geraden liegen mindestens 3 Punkte.

Axiom (P2) heißt das Axiom von Veblen und Young, Axiom (P3) ist das Reichhaltigkeitsaxiom. Wenn sich je zwei Geraden in genau einem Punkt schneiden, sprechen wir von einer projektiven Ebene.
Statt $(p, g) \in \mathcal{I}$ schreiben wir $p \in g$. Für $p \in \mathcal{P}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_p$ das Geradenbüschel $\{g \in \mathcal{G} \mid p \in g\}$. Die Punktmenge einer Geraden g bezeichnen wir mit g und identifizieren die Gerade mit ihrer Punktmenge.

2.2.2. Definition. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume eines links-Vektorraumes V über einem Schiefkörper $\mathbb{K}$ und sei $\mathcal{G}$ die Menge der zweidimensionalen Untervektorräume von V. Dann ist das Paar $PV = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ein projektiver Raum. Jeder zu PV isomorphe projektive Raum heißt ein *desarguesscher projektiver Raum über* $\mathbb{K}$.

2.2.3. Definition. Sei V ein $n+1$ dimensionaler links-Vektorraumes V über einem Schiefkörper $\mathbb{K}$. Dann heißt $P_n\mathbb{K} := PV$ *desarguesscher projektiver Raum der Dimension n über dem Schiefkörper* $\mathbb{K}$, abkürzend als $n-$Raum bezeichnet.

2.2.4. Lemma. *Jeder projektive Raum, der keine projektive Ebene ist, ist desarguessch.*

Beweis: Dieser Beweis findet sich in [**Be**, Satz 2.7.1] □

2.2.5. Definition. Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $v \in V$. Dann bezeichnen wir mit $[v]$ den von v erzeugten eindimensionalen Untervektorraum von V. Also ist $[v]$ ein Punkt von PV. Die Darstellung $[v]$ nennen wir *homogene Koordinaten* des Punktes v.

2.2.6. Definition. Sei U ein Untervektorraum des Vektorraumes V, dann heißt $\{[u] \mid u \in U\backslash\{0\}\}$ ein *Unterraum* der Dimension $\dim(U) - 1$ von PV. Falls ein $v \in V\backslash U$ existiert, so dass $\langle U, v\rangle = V$ gilt, heißt $\{[u] \mid u \in U\backslash\{0\}\}$ eine *Hyperebene.*

2.2.7. Definition. Sei Π ein projektiver Raum und sei M eine Teilmenge der Punktmenge von Π. Dann bezeichnen wir mit $\langle M\rangle$ den kleinsten Unterraum von Π der M enthält.

2.2.8. Definition. Eine *Unterebene* einer projektiven Ebene $(X, \mathcal{L})$ ist eine projektive Ebene $(V, \mathcal{G})$ mit $V \subseteq X$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ und der induzierten Inzidenz.

Um Verwechslungen der Definition 2.2.8 mit dem zweidimensionalen Fall von Definition 2.2.6 zu vermeiden, wollen wir, wenn wir uns auf Definition 2.2.8 beziehen, dies explizit ausdrücken oder durch die Formulierung "Unterebene der Ebene" kenntlich machen. Das folgende Beispiel verdeutlicht den Unterschied zwischen beiden Definitionen:
Die reelle projektive Ebene ist eine Unterebene der komplexen projektiven Ebene im Sinne der Definitionen 2.2.8, aber ein zweidimensionaler Unterraum des dreidimensionalen reellen projektiven Raumes im Sinne der Definition 2.2.6.

2.2.9. Definition. Sei $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein projektiver Raum und $H = (\mathcal{P}', \mathcal{G}', \mathcal{I}) \subset \Pi$ eine Hyperebene. Dann nennen wir die Geometrie $\Pi\backslash H := (\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}', \mathcal{G}\backslash\mathcal{G}', \mathcal{I})$ einen *affinen Raum* und wir nennen Π den *projektiven Abschluss* von $\Pi\backslash H$ und schreiben $\Pi = \overline{\Pi\backslash H}$.

Offensichtlich gilt:

2.2.10. Lemma. *Der projektive Abschluss eines affinen Raumes ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

2.2.11. Definition. Ein *Cap* ist Teilmenge eines projektiven Raumes, von der keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.

2.2.12. DEFINITION. Eine *Kollineation* ist eine Bijektion der Punktmengen zweier projektiver oder affiner Räume, bei der das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist.

2.2.13. DEFINITION. Ein *Isomorphismus* von zwei Inzidenzgeometrien ist eine Bijektion der Punktmengen und der Geradenmengen, bei denen Inzidenz und nicht-Inzidenz erhalten bleibt.

Die Begriffe Kollineation projektiver Räume und Isomorphie projektiver Räume bezeichnen das Gleiche. Wir benutzen den Begriff Isomorphismus für Kollineationen von Caps und Veronesemannigfaltigkeiten, während wir den Begriff Kollineation für Isomorphismen des umgebenden Raumes verwenden.

2.2.14. DEFINITION. Eine *lineare Kollineation* eines desarguesschen projektiven Raumes PV über einem Vektorraum V ist eine Kollineation der Form: $[x] \mapsto [xA]$ mit einer linearen Abbildung $A : V \to V$.

2.2.15. LEMMA. *In einem desarguesschen projektiven Raum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ über einem Schiefkörper $\mathbb{K}$ werden Kollineationen von $\mathbb{K}-$semilinearen Abbildungen induziert.*

Beweis: Dies ist die Aussage des Fundamentaltheorems der projektiven Geometrie und zum Beispiel in [**Fau**] oder in [**Sa**, 13.6, Seite 46] nachzulesen. $\square$

2.2.16. KOROLLAR. *Seien U, V Unterräume eines desarguesschen projektiven Raumes X. Dann existiert zu zwei linearen Kollineationen α_U mit Definitionsbereich U und α_V mit Definitionsbereich V, die auf $U \cap V \neq \emptyset$ übereinstimmen, genau eine lineare Kollineation mit Definitionsbereich $\langle U, V\rangle$, die α_U und α_V fortsetzt.*

Beweis: Lineare Algebra. $\square$

2.2.17. DEFINITION. Eine *Achse* einer Kollineation σ eines projektiven Raumes Π ist eine Hyperebene A, so dass für alle Punkte $p \in A$ gilt: $p^\sigma = p$.

2.2.18. DEFINITION. Ein *Zentrum* einer Kollineation σ eines projektiven Raumes Π ist ein Punkt $z \in \Pi$, so dass für jede Hyperebene H, die z enthält, $H^\sigma = H$ gilt.

2.2.19. DEFINITION. Eine Kollineation eines projektiven Raumes, die eine Achse hat, hat nach [**Pi**, 3.4, Seite 65] auch ein Zentrum und heißt eine *Perspektivität*. Liegt das Zentrum nicht auf der Achse, reden wir von einer *Homologie*.

2.2.20. DEFINITION. Sei t eine Perspektivität des projektiven Raumes R mit Achse L und Zentrum $z \in L$. Dann nennen wir t eine *Elation*.

2.2.21. Definition. Sei f eine Homologie des projektiven Raumes R mit Achse L. Die Abbildung $s|_{R\setminus L}$ nennen wir eine *Streckung.*

2.2.22. Definition. Sei M eine Teilmenge der Punktmenge eines projektiven Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$. Denn nennen wir jede Gerade aus $\mathcal{G}$, die M in genau einem Punkt schneidet eine *Tangente* an M.

2.2.23. Definition. Ein *Oval* ist ein Cap in einer projektiven Ebene, bei dem jeder Punkt des Caps auf genau einer Tangente liegt.

2.2.24. Definition. Ein *Ovoid* O ist ein Cap in einem projektivem Raum mit der Eigenschaft, dass für jeden Punkt $x \in O$ die Tangenten an x eine Hyperebene in $\langle O \rangle$ bilden, die wir mit $T_x(O)$ bezeichnen und Tangentialraum nennen. Wir sagen, ein Ovoid O hat die Dimension $\dim\langle O \rangle - 1$.

2.2.25. Lemma. *Seien O ein Ovoid der Dimension $k-1$ und $R \leq \langle O \rangle$ ein Unterraum von R mit Dimension $d \geq 2$. Falls $O \cap R$ mehr als einen Punkt enthält, ist $O \cap R$ ein Ovoid der Dimension $d-1$.*

Beweis: Seien $x \in O \cap R$ und $T := T_x(O \cap R) = \{y \in R \mid \langle x, y \rangle \cap O = x\}$. Dann gilt $T = R \cap T_x(O)$ und T ist mindestens eine Hyperebene in R, weil $T_x(O)$ eine Hyperebene ist. Da umgekehrt R nicht in $T_x(O)$ enthalten ist, weil R mehr als einen Punkt aus O enthält, ist T somit eine Hyperebene in R. Das heißt auch, dass jede Gerade $g \subseteq R$, die x enthält und nicht in T enthalten ist, eine Sekante ist. Damit liegt jeder Punkt aus $R\setminus T$ auf einer Sekanten, also gilt $R = \langle R \cap O \rangle$. Somit ist $O \cap R$ ein Ovoid der Dimension $d-1$. □

2.2.26. Definition. Zwei Ovoide O_1 und O_2 heißen *äquivalent*, wenn es eine Kollineation $\varphi : \langle O_1 \rangle \to \langle O_2 \rangle$ gibt, die O_1 auf O_2 abbildet.

2.2.27. Definition. Eine (orthogonale) *Quadrik* Q ist eine Teilmenge eines $k-$dimensionalen desarguesschen projektiven Raumes Π über einem Körper $\mathbb{K}$, für die eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{K}^{(k+1)\times(k+1)}$ existiert, so dass $Q = \big\{[x] \in \Pi \mid xMx^T = 0\big\}$ gilt.

2.2.28. Lemma. *Sei Q eine Quadrik in einem desarguesschen projektiven Raum über einen Körper $\mathbb{K}$ mit von zwei verschiedener Charakteristik. Fall Q keine Gerade enthält, ist Q ein Ovoid und für alle $x \in Q$ gilt $T_x(Q) = \big\{[y] \in \langle Q \rangle \mid xMy^T = 0\big\}$.*

Beweis: Wenn eine Quadrik drei Punkte einer Geraden enthält, enthält die Quadrik die ganze Gerade. Somit ist eine Quadrik, die keine Gerade enthält, ein Cap.
Sei $T := \big\{[y] \in \langle Q \rangle \mid xMy^T = 0\big\}$. Wir zeigen jetzt, dass T der Tangentialraum von x an Q ist. Weil T eine Hyperebene in $\langle Q \rangle$
Zuerst zeigen wir, dass für alle $[y] \in T$ die Gerade $\langle x, y \rangle$ eine Tangente ist. Dazu nehmen wir an, es gäbe $[y] \in T$, so dass ein von $[x]$ verschiedener Punkt $[z] \in \langle x, y \rangle \cap Q$ existiert.

Dann ist jeder Punkt aus $\langle x, y\rangle$ von der Form $[sx + tz]$ mit $s, t \in \mathbb{K}$. Wegen $[z] \in T \cap Q$ gilt $(sx + tz)M(sx + tz)^T = 0 + 2stxMz^T + 0 = 0$. Daher ist $[sx + tz] \in \langle x, y\rangle$ und somit gilt $\langle x, y\rangle \subseteq Q$, was nicht sein kann, weil Q keine Gerade enthält. Also ist $\langle x, y\rangle$ eine Tangente und es gilt $y \in T_{[x]}(Q)$.
Jetzt zeigen wir, dass jede Tangente an x in T enthalten ist, indem wir zeigen, dass für alle $[y] \notin T$ die Gerade $\langle x, y\rangle$ keine Tangente ist.
Sei dazu $xMy^T \neq 0$. Falls $[y] \in Q$, ist $\langle x, y\rangle$ keine Tangente. Anderenfalls ist auch $yMy^T \neq 0$ und der von $[x]$ verschiedene Punkt $[z] := [x - 2(yMy^T)^{-1}(yMx^T)y] \in \langle x, y\rangle$ ist wegen

$$\begin{aligned} zMz^T &= \left(x - 2(yMy^T)^{-1}(yMx^T)y\right) M \left(x - 2(yMy^T)^{-1}(yMx^T)y\right)^T \\ &= 0 - 4(yMy^T)^{-1}(yMx^T)^2 + 4(yMy^T)^{-2}(yMx^T)^2 yMy^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

in Q enthalten. Damit ist $\langle x, y\rangle$ auch in diesem Fall keine Tangente. □

2.2.29. BEMERKUNG. *Alle in dieser Arbeit vorkommenden Quadriken sind Ovoide. Wenn wir von der Äquivalenz von Quadriken reden, meinen wir die Äquivalenz der beiden als Ovoide. Häufig bezeichnet man zwei in einem desarguesschen projektiven Raum* Π *enthaltene Quadriken* $\left\{[x] \in \Pi \mid xM_1x^T = 0\right\}$ *und* $\left\{[x] \in \Pi \mid xM_2x^T = 0\right\}$ *als äquivalent, wenn es eine invertierbare Matrix* $T \in \mathbb{K}^{(k+1)\times(k+1)}$ *gibt, so dass* $TM_1T^T = M_2$ *gilt. Dies ist eine stärkere Forderung als die Äquivalenz von Quadriken als Ovoide, denn die Quadriken werden hier nicht durch eine beliebige, sondern durch eine lineare Kollineation auf einander abgebildet. Daher nennen wir zwei auf diese Weise äquivalente Quadriken linear äquivalent.*

2.2.1. Desarguessche affine Ebenen.

2.2.30. DEFINITION. Sei $\mathbb{F}$ eine alternative Divisionsalgebra, dann ist die *affine Ebene über* $\mathbb{F}$ die Geometrie $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ mit Punktmenge $\mathbb{F}^2$ mit der folgenden Geradenmenge:

$$\begin{aligned} [s, t] &= \{(x, xs + t \mid x \in F\} \qquad s, t \in \mathbb{F}, \\ [c] &= \{c\} \times \mathbb{F} \qquad\qquad\quad c \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

2.2.31. LEMMA. *Falls* $\mathbb{F}$ *assoziativ ist, sind die affinen Automorphismen von* $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ *genau die Abbildungen der Form*

$$(x, y) \mapsto (x^\sigma, y^\sigma)^\varphi + (a, b)$$

wobei a, b *Elemente der Algebra* $\mathbb{F}$ *sind,* σ *ein Automorphismus von* $\mathbb{F}$ *und* φ *eine lineare Abbildung von* $\mathbb{F}^2$ *als* $\mathbb{F}-$*Vektorraum.*
Beweis: Siehe [**Sa**, Theorem 12.10, S. 32]. □

2.2.32. DEFINITION. Sei t eine Elation des desarguesschen projektiven Raumes $P_n\mathbb{K}$ mit Achse L. Dann gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n$, so dass die Einschränkung von t auf den affinen Raum $P_n\mathbb{K}\backslash L$ bei passend gewählten Koordinaten durch die Vorschrift $x \mapsto x+v$ beschrieben werden kann. Diese Abbildung nennen wir dann eine *Translation.*

2.2.33. Definition. Der *Kern* eines alternativen Divisionsringes $\mathbb{F}$ ist die Teilmenge $K(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}$, so dass für alle $f \in K(\mathbb{F})$ die Abbildung $\varphi_f : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ mit $(u,v)^{\varphi_f} = (uf, vf)$ eine Kollineation der affinen Ebene $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ induziert vereinigt mit $\{0\}$.

Das folgende Lemma zeigt, dass diese Definition zu der von Lüneburg in [**Lu**, Seite 3] äquivalent ist.

2.2.34. Lemma. *Sei $\mathbb{F}$ eine Divisionsalgebra, dann ist jede Kollineation von $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$, die alle $(0,0)$ enthaltenden Geraden auf sich selbst abbildet, von der Form $(a,b) \mapsto (as, bs)$ mit $s \in K(\mathbb{F})$.*

Beweis: [**Sa**, Lemma 23.11]. □

2.3. Translationsebenen

2.3.1. Definition. Sei $\eta = (\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene und $S \in \mathcal{G}$. Wenn die Gruppe der Elationen von η mit Achse S transitiv auf $\mathcal{E} \backslash S$ ist, nennen wir S eine *Translationsgerade* von η und η eine *Translationsebene*.

2.3.2. Definition. Ein *Spread* eines projektiven Raumes Π ist eine Menge von disjunkten Teilräumen von Π, so dass jeder Punkt des ganzen Raumes in genau einem der Teilräume liegt.

2.3.3. Definition. Seien d eine gerade natürliche Zahl mit $d \geq 4$ und U ein d-dimensionaler projektiver Raum über einen Schiefkörper $\mathbb{K}$. Wir zeichnen eine Hyperebene R als unendlich ferne Hyperebene aus. In R wählen wir ein Spread S von $(d/2-1)$-Räumen. Wir definieren eine Geometrie $\eta = (\mathcal{E}, \mathbb{L})$. Als Punktmenge $\mathcal{E}$ nehmen wir die Punkte des affinen Raumes $U \backslash R$ und die Elemente des Spreads S. Die Elemente des Spreads S sind $(d/2-1)$-Räume in U und zugleich Punkte in η, während die Punkte aus $U \backslash R$ sowohl in U als auch in η Punkte sind.
Die Geradenmenge $\mathbb{L}$ bestehe aus den $d/2$-dimensionalen Unterräume von U die R in einem $(d/2-1)$-Raum des Spreads S schneiden und dem Spread S selbst.
Die Gemoetrie $\eta = ((U \backslash R) \cup S, \mathbb{L})$ ist, wie wir durch Überprüfen der Axiome leicht einsehen können, eine projektive Ebene. Diese Konstruktion nennen wir die *Andre-Bose-Bruck-Ebene*. Wenn eine bereits vorhandene projektive Ebene η mit einem Isomorphismus auf eine Andre-Bose-Bruck-Ebene abgebildet wird, nennen wir die Andre-Bose-Bruck-Konstruktion die *Andre-Bose-Bruck-Darstellung* von η.

Sei für diesen Abschnitt $\eta := (\mathcal{E}, \mathbb{L})$ eine Andre-Bose-Bruck-Ebene im $d-$dimensionalen Raum U über $\mathbb{K}$ mit R und S wie in Definition 2.3.3. Wir wählen die Koordinaten von U so, dass $R = \left\{[0, k_1, \ldots, k_d] \mid (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{K}^d\right\}$ gilt. Mit spitzen Klammern bezeichnen wir das Erzeugnis im projektiven Raum U über $\mathbb{K}$.

2.3.4. Lemma. *Kollineationen von U, die R punktweise fest lassen, induzieren Isomorphismen von η mit Achse S.*

Beweis: Sei φ eine Kollineation von U, die R punktweise fest lässt. Die induzierte Abbildung ist dann φ' mit $\varphi'|_{U\backslash R} := \varphi|_{U\backslash R}$ und $\varphi'|_S := \mathrm{id}_S$. Sei $L \in \mathbb{L}$ mit $p := L \cap R$ und sei $x \in L\backslash R$. Dann ist $L^{\varphi'} = \langle x^{\varphi}, p\rangle \in \mathbb{L}$ und damit φ' ein Isomorphismus von $\mathcal{E}$. Da S punktweise fest gelassen wird, ist S Achse von φ'. □

2.3.5. Lemma. *Die Gerade S ist eine Translationsgerade.*

Beweis: Seien $p \in S$ und $M \in \mathbb{L}_p$. Dann ist M ein $d/2$ dimensionaler Teilraum von U. Wir wählen zwei verschiedene Punkte $[x] = [1, x_1, \dots, x_d]$ und $[y] = [1, y_1, \dots, y_d]$ aus M. Da $[x], [y] \in M$ sind, schneidet die Gerade $\langle [x], [y]\rangle$ den $(d/2-1)-$Raum p im Punkt $[y-x]$. Dann ist die durch $[k_0, \dots, k_d]^{\varphi} := [(k_0, \dots, k_d) + k_0(y-x)]$ definierte Abbildung eine Kollineation von U, die R punktweise fest läst. Nach Lemma 2.3.4 induziert φ einen Isomorphismus φ' von η mit Achse S. Dass das Zentrum von φ' gerade p ist, zeigen wir, indem wir für einen beliebigen Punkt $[z] \in \mathcal{E}\backslash S$ das Bild $\langle [z], p\rangle^{\varphi'}$ ausrechnen: $\langle [z], p\rangle^{\varphi'} = \langle [z + z_0(y-x)], p\rangle = \langle [z], p\rangle$. Also haben wir eine Kollineation von $(\mathcal{E}, \mathbb{L})$ mit Zentrum p und Achse S, die $[x]$ auf $[y]$ abbildet. Daher ist S Translationgerade von $(\mathcal{E}, \mathbb{L})$. □

2.3.6. Korollar. *Sei τ eine Kollineation von η mit Achse S und Zentrum $z \in S$. Dann ist $\tau|_{U\backslash R}$ eine Translationen des affinen Raumes $P_d\mathbb{K}\backslash R \cong \mathbb{K}^d$.*

Beweis: Sei $x \in \mathcal{E}\backslash S$. Dann gibt es genau eine Translation φ des affinen Raumes $U\backslash R$ die x auf x^{τ} abbildet. Die Fortsetzung von φ auf U induziert nach Lemma 2.3.4 eine Kollineation φ' von η mit Achse S, die x auf x^{τ} abbildet. Da $\langle x, x^{\tau}\rangle$ eine Fixgerade von φ ist, ist die Verbindungsgerade von x und x^{τ} in $\mathcal{E}$ eine Fixgerade von φ'. Diese schneidet S im Punkt z. Daher ist z das Zentrum von φ' und es gilt $\varphi' = \tau$ und somit auch $\tau|_{U\backslash R} = \varphi'|_{U\backslash R} = \varphi$. □

2.3.1. Moufangebenen.

2.3.7. Definition. Eine projektive Ebene, bei der jede Gerade eine Translationsgerade ist, nennen wir *Moufangebene*.

2.3.8. Lemma. *Die Kollineationsgruppe einer Moufangebene wirkt transitiv auf nicht ausgearteten Vierecken.*

Beweis: Siehe [**Pi**, 7.14, Seite 195]. □

2.3.9. Lemma. *Die Menge der Elationen einer Moufangebene wirkt transitiv auf nicht ausgearteten Dreiecken.*

Beweis: Seien p_1, p_2, p_3 drei nicht kollineare Punkte der Moufangebene $(\mathcal{E}, \mathbb{L})$ und sei ferner $p_3' \in \mathcal{E} \backslash \langle p_1, p_2 \rangle$. Wir zeigen, dass es eine Elation τ gibt, die $p_1^\tau = p_1$, $p_2^\tau = p_2$ und $p_3^\tau = p_3'$ erfüllt. Falls $p_3 = p_3'$ gilt, können wir $\tau = \mathrm{id}$ wählen. Andernfalls ist die Gruppe der Kollineationen mit Zentrum $z := \langle p_3, p_3' \rangle \cap \langle p_1, p_2 \rangle$ und Achse $\langle p_1, p_2 \rangle$ transitiv auf $\langle p_3, p_3' \rangle \backslash \{z\}$. Also existiert eine Elationen τ mit Achse $\langle p_1, p_2 \rangle$, die p_3 auf p_3' abbildet. □

2.4. Äquivalenzsätze für Ovoide

In diesem Abschnitt behandeln wir allgemeine Sätze über Ovoide. Bei Lemma 2.4.2 vermute ich, dass es nicht neu ist sondern im Zusammenhang mit Möbiusgeometrien schon bekannt ist, habe aber noch keine Quelle gefunden.
Die Ergebnisse dieses Abschnittes gelten auch für Körper $\mathbb{K}$ mit Charakteristik 2.

2.4.1. LEMMA. *Sei O ein Ovoid mit Dimension ≥ 2 in einem desarguesschen projektiven Raum über einem kommutativen Körper, so dass jeder Schnitt von O mit einem zweidimensionalen Unterraum von $\langle O \rangle$, der mehr als einen Punkt enthält, eine Quadrik ist. Dann ist O eine Quadrik.*

Beweis: Die Aussage folgt aus einem allgemeineren Satz in [**Bu**, S. 312, Proposition 4.4] □

2.4.2. LEMMA. *Seien R_1 und R_2 projektive Räume der Dimension $k \geq 3$ über $\mathbb{K}$, die von den Ovoiden L_1 bzw. L_2 aufgespannt werden. Sei β eine bijektive Abbildung von L_1 auf L_2, die Schnitte von L_1 mit $2-$Unterräumen von R_1 auf Schnitte von L_2 mit $2-$Unterräumen von R_2 abbildet. Dann gibt es genau eine Kollineation α von R_1 nach R_2, die β fortsetzt.*

Beweis: Zuerst zeigen wir die Eindeutigkeit: Seien $a \in R_1$ und $x_1, x_2 \in L_1 \backslash \{a\}$ mit $x_1 \neq x_2$. Wir wählen zwei verschiedene Punkte $x_3, x_4 \in L_1 \backslash \langle a, x_1, x_2 \rangle$ und zwei weitere verschiedene Punkte $x_5, x_6 \in L_1$, so dass $\langle x_5, x_6 \rangle \cap \langle a, x_1, x_2 \rangle \cap \langle a, x_3, x_4 \rangle = \emptyset$ gilt. Damit ist a eindeutiger Schnittpunkt der drei $2-$Räume $\langle a, x_1, x_2 \rangle$, $\langle a, x_3, x_4 \rangle$ und $\langle a, x_5, x_6 \rangle$, die L_1 in je in einem Oval schneiden. Der Bildpunkt muss der Schnittpunkt der $2-$Räume sein, die von den Bildovalen unter β erzeugt werden.

Die Existenz ist weit schwieriger zu beweisen:
Für $a, b \in L_1$ mit $a \neq b$ bezeichnen wir mit $\langle a, b \rangle^{\alpha_0}$ die Sekante in R_2 durch a^β und b^β. Ist η ein $2-$Raum, der L_1 in einem Oval O schneidet, dann bezeichnet η^{α_0} den $2-$Raum der L_2 im Oval O^β schneidet. Offensichtlich ist α_0 als Abbildung sowohl auf der Menge der Sekanten als auch auf der Menge der $2-$Räume, die L_1 in einem Oval schneiden, injektiv.
Seien $x, y \in L_1$ fest gewählt. Dann ist jeder Punkt $a \in R_1 \backslash (T_x(L_1) \cup T_y(L_1) \cup \langle x, y \rangle)$ Schnittpunkt von zwei Sekanten durch x und y, die L_1 in den Punkten x_a und y_a schneiden. Wir definieren:

$$a^{\alpha_1} := \langle x, x_a \rangle^{\alpha_0} \cap \langle y, y_a \rangle^{\alpha_0}.$$

Dieser Schnittpunkt existiert, weil $2-$Raumschnitte auf $2-$Raumschnitte abgebildet werden. Die hier definierte Abbildung α_1 ist injektiv, weil L_1 und $L_1^\beta = L_2$ Ovoide sind und β bijektiv ist. Für $z \in L_1 \backslash \{x, y\}$ ist nach der obigen Definition $z^{\alpha_1} = \langle x, z \rangle^{\alpha_0} \cap \langle y, z \rangle^{\alpha_0} = z^\beta$. Ebenfalls klar ist, dass $2-$Räume, die L_1 in einem Oval schneiden, das x bzw. y enthält, auf $2-$Räume

abgebildet werden, die L_2 in einem Oval schneiden, das x^β bzw. y^β enthält. Denn L_1 wird auf L_2 abgebildet und Sekanten durch x auf Sekanten durch x^β. Wir zeigen jetzt, dass, wenn $a, b, c \in R_1 \backslash (T_x(L_1) \cup T_y(L_1) \cup \langle x, y \rangle)$ auf einer Geraden g liegen, auch $a^{\alpha_1}, b^{\alpha_1}, c^{\alpha_1}$ auf einer Geraden liegen. Das ist klar, wenn g nicht in einem $2-$Raum mit x und y liegt. Denn dann sind $a^{\alpha_1}, b^{\alpha_1}, c^{\alpha_1} \in \langle g, x\rangle^{\alpha_0} \cap \langle g, y\rangle^{\alpha_0}$ in einer Geraden enthalten. Damit ist auch klar, dass alle $2-$Räume, die L_1 in einem Oval schneiden, das nicht x oder y enthält, auf $2-$Räume abgebildet werden, die L_2 in einem Oval schneiden. Denn jeder Punkt eines solchen $2-$Raumes ist in einer Sekanten enthalten, die nicht auf einem $2-$Raum mit x und y liegt. Das nutzen wir, um zu zeigen, dass auch Geraden in einem $2-$Raum mit x und y auf Geraden abgebildet werden.
Sei dazu g eine Gerade die mit x und y in einem $2-$Raum η enthalten ist. Sei d ein Punkt außerhalb von η, so dass $\delta := \langle a, b, d\rangle$ das Ovoid L_1 in einem Oval schneidet. Damit ist $\eta^{\alpha_0} \cap \delta^{\alpha_0}$ eine Gerade die $a^{\alpha_1}, b^{\alpha_1}, c^{\alpha_1}$ enthält.
Jeder Punkt in R_2, der nicht in $x^\beta y^\beta \cup T_{x^\beta}(L_2) \cup T_{y^\beta}(L_2)$ liegt, hat so auch ein Urbild unter α_1, denn er liegt auf je einer Sekante durch x^β und y^β.

Es wird einem Punkt $p \in T_x(L_1) \backslash T_y(L_1)$ der Punkt

$$p^{\alpha_2} := T_{x^\beta}(L_2) \cap \langle y, p\rangle^{\alpha_0}$$

zugeordnet, für a aus dem Definitionsbereich von α_1 gelte $a^{\alpha_2} := a^{\alpha_1}$.

Mit dieser Definition ist α_2 injektiv, denn $T_{x^\beta}(L_2)$ hat ein leeres Urbild unter α_1, und α_0 ist injektiv auf Geraden. Seien $a, b \in R_1 \backslash (T_x(L_1) \cup T_y(L_1) \cup \langle x, y\rangle)$ Punkte auf einer Geraden g, die $T_x(L_1)$ in einem Punkt p schneidet. Wir zeigen, dass dann a^{α_2}, b^{α_2} und p^{α_2} auf einer Geraden liegen:
Falls $x \in g$ oder $y \in g$ gilt, ist g wegen $a, b \notin T_y(L_1) \cup T_x(L_1)$ eine Sekante. Daher ist nach Definition klar, dass a^{α_2}, b^{α_2} und p^{α_2} auf der Geraden g^{α_0} liegen. Seien nun $x, y \notin g$. Falls g nicht in einem $2-$Raum mit x und y liegt, schneiden die $2-$Räume $\langle a, b, x\rangle$ und $\langle a, b, y\rangle$ das Ovoid L_1 jeweils in einem Oval, denn sie sind nicht in den Tangentialräumen enthalten und schneiden L_1. Sei nun die Gerade $l \subset R_2$ definiert als $\langle a, b, x\rangle^{\alpha_0} \cap \langle a, b, y\rangle^{\alpha_0}$. Die Gerade l enthält die Punkte a^{α_2} und b^{α_2} und liegt zusammen mit $\langle y, p\rangle^{\alpha_0}$ in $\langle a, b, y\rangle^{\alpha_0}$. Somit schneiden sich l und $\langle y, p\rangle^{\alpha_0}$ in einem Punkt q. Wenn wir gezeigt haben, dass $q \in T_{x^\beta}(L_2)$ liegt, ist nach Definition klar, dass $q = p^{\alpha_2}$ gilt.
Nehmen wir an, es gälte $q \notin T_{x^\beta}(L_2)$. Der Punkt q ist auch nicht in $T_{y^\beta}(L_2)$ enthalten, weil $\langle y, p\rangle^{\alpha_0}$ eine Sekante ist. Des Weiteren liegt q auch nicht auf $x^\beta y^\beta$, da diese Gerade $\langle p, y\rangle^{\alpha_0}$ in $y^\beta \neq q$ schneidet. Also hat q ein Urbild unter α_1. Dieses kann nur der Schnittpunkt von $\langle a, b\rangle$ mit $\langle y, p\rangle$ sein, der in $T_x(L_1)$ liegt, ein Widerspruch.
Falls g in einem $2-$Raum η mit x und y liegt, liegen die Geraden $l := \langle a^{\alpha_1}, b^{\alpha_1}\rangle$ und $\langle p, y\rangle^{\alpha_0}$ in dem $2-$Raum η^{α_0}, schneiden sich deshalb in einem Punkt q, und es gilt das selbe Argument wie oben. Daher liegen in jedem Fall a^{α_2}, b^{α_2} und p^{α_2} auf einer Geraden.
Seien nun o, p, q drei Punkte auf einer Geraden g, die ganz in $T_x(L_1)$ enthalten ist. Dann sind o^{α_2}, p^{α_2} und q^{α_2} in der Schnittgeraden von $T_{x^\beta}(L_2)$ und $\langle g, y\rangle^{\alpha_0}$ enthalten. Damit ist gezeigt, dass α_2 Geraden auf Geraden abbildet.
Im nächsten Schritt wird einem Punkt $p \in T_y(L_1) \backslash T_x(L_1)$ der Punkt

$$p^{\alpha_3} := T_{y^\beta}(L_2) \cap \langle x, p\rangle^{\alpha_0}$$

zugeordnet. Für a aus dem Definitionsbereich von α_2 gelte $a^{\alpha_3} := a^{\alpha_2}$.

Wie bei α_2 sind Injektivität und Erhaltung von Geraden klar. Eine Gerade g, die je einen Punkt aus $p \in T_x(L_1)$, $q \in T_y(L_1)$ und $a \in R_1 \backslash (T_x \cup T_y)$ enthält, muss einen weiteren Punkt $b \in R_1 \backslash (T_x \cup T_y)$ enthalten. Also wird g auf die Gerade $\langle a, p\rangle^{\alpha_2}$ und auf die Gerade $\langle a, q\rangle^{\alpha_3}$ abgebildet. Also müssen die beiden Geraden gleich sein. Damit ist auch klar, dass jeder Punkt aus $R_2 \backslash (x^\beta y^\beta \cup (T_{x^\beta}(L_2) \cap T_{y^\beta}(L_2)))$ ein Urbild unter α_3 hat. Als nächstes betrachten wir die Punkte aus $T_x(L_1) \cap T_y(L_1)$. Für diese definieren wir:

$$p^{\alpha_4} := \langle\langle x, p\rangle^{\alpha_3}\rangle \cap \langle\langle y, p\rangle^{\alpha_3}\rangle.$$

Die beiden Geraden $\langle\langle x, p\rangle^{\alpha_3}\rangle$ und $\langle\langle y, p\rangle^{\alpha_3}\rangle$ schneiden sich, da sie in dem $2-$Raum $\langle x, y, p\rangle^{\alpha_0}$ liegen. Für a aus dem Definitionsbereich von α_3 ohne die Punkte x und y gilt bereits $a^{\alpha_4} = a^{\alpha_3}$, weil α_3 Geraden auf Geraden abbildet. Die Punkte $x^{\alpha_4} := x^\beta$ und $y^{\alpha_4} := y^\beta$ legen wir fest. Offenbar werden Punkte aus $T_x(L_1) \cap T_y(L_1)$ auf Punkte aus $m := T_{x^\beta}(L_1) \cap T_{y^\beta}(L_1)$ abgebildet, und auch hier ist Injektivität offensichtlich. Es bleibt zu zeigen, dass, wenn a, b, p auf einer Geraden g liegen, die $T_x(L_1) \cap T_y(L_1)$ in p schneidet, auch a^{α_4}, b^{α_4} und p^{α_4} auf einer Geraden liegen. Wenn g einen der Punkte x oder y enthält, ist nach Definition alles klar. Wenn g ganz in $T_x(L_1)$ liegt, aber x nicht enthält, gilt $p^{\alpha_4} \in \langle\langle x, p\rangle^{\alpha_3}, \langle y, p\rangle^{\alpha_3}\rangle = \langle x, y, p\rangle^{\alpha_0}$. Somit ist $p^{\alpha_4} = \langle x, y, p\rangle^{\alpha_0} \cap m$. Gleichheit gilt, da $\langle x, y, p\rangle^{\alpha_0} \cap m$ auch nur ein Punkt ist, weil $\langle x^\beta, y^\beta\rangle$ den $(k-1)-$Raum m nicht schneidet.
Die Gerade $\langle a^{\alpha_4}, b^{\alpha_4}\rangle$ schneidet $\langle x, y, p\rangle^{\alpha_0}$ in einem Punkt u, der kein Urbild unter α_3 hat, also auf keiner Sekanten durch y liegt. Damit ist $u \in m$, womit $p^{\alpha_4} = \langle x, y, p\rangle^{\alpha_0} \cap m = u \in \langle a^{\alpha_4}, b^{\alpha_4}\rangle$ gilt.

Falls g den Tangentialraum $T_x(L_1)$ in p schneidet, schneidet $\langle a^{\alpha_4}, b^{\alpha_4}\rangle$ beide Tangentialräume in je einem Punkt, die beide kein Urbild unter α_3 haben. Keiner der Schnittpunkte kann auf $\langle x^\beta, y^\beta\rangle$ liegen, also müssen beide auf m liegen. Da g nicht ganz in m liegen kann, müssen beide Schnittpunkte gleich sein. Damit schneidet $\langle a^{\alpha_4}, b^{\alpha_4}\rangle$ wie im vorherigen Fall m und $\langle x, y, p\rangle^{\alpha_0}$ in einem gemeinsamen Punkt, falls nicht g bereits in $\langle x, y, p\rangle$ enthalten ist. Dann aber schneidet $a^{\alpha_4} b^{\alpha_4}$ die Tangente an x^β in genau einem Punkt, der kein Urbild unter α_3 hat, dabei kann es sich nur um p^{α_4} handeln.

Um eine Kollineation auf ganz R_1 zu konstruieren, fehlt nur noch das Bild der Geraden $\langle x, y\rangle$. Dazu passend fehlt in R_2 auch nur noch eine Gerade. Es sei $z \in \langle x, y\rangle$. Sei G_z die Menge aller Geraden in R_1, die z enthalten, und seien $g, h \in G_z$. Dann gibt es zwei Geraden f_1 und f_2, die beide g und h in verschiedenen Punkten, die nicht auf $\langle x, y\rangle$ liegen, schneiden. Daher schneiden auch $\langle f_1^{\alpha_4}\rangle$ und $\langle f_2^{\alpha_4}\rangle$ die Geraden $\langle g^{\alpha_4}\rangle$ und $\langle h^{\alpha_4}\rangle$ in verschiedenen Punkten. Nach dem Veblen-Young-Axiom schneiden sich also auch die Geraden $\langle g^{\alpha_4}\rangle$ und $\langle h^{\alpha_4}\rangle$ in einem Punkt. Wegen der Injektivität von α_4 gilt $g^{\alpha_4} \cap h^{\alpha_4} = \emptyset$, also hat $\langle g^{\alpha_4}\rangle \cap \langle h^{\alpha_4}\rangle$ kein Urbild unter α_4, und muss daher auf der Geraden $\langle x^\beta, y^\beta\rangle$ liegen. Somit schneiden sich alle Bilder von Geraden aus G_z in einem gemeinsamen Punkt auf der Geraden $\langle x^\beta, y^\beta\rangle$. Diesen Punkt definieren wir als z^α. Für Punkte nicht auf $\langle x, y\rangle$ definieren wir $\alpha = \alpha_4$. Die Abbildung α bildet Geraden auf Geraden ab, weil α_4 Geraden auf Geraden abbildet und $\langle x, y\rangle$ auf $\langle x^\beta, y^\beta\rangle$ abgebildet wird. Des Weiteren ist α nach Konstruktion injektiv. Die Surjektivität sehen wir, wenn wir einen Punkt $v \in \langle x^\beta, y^\beta\rangle$ betrachten. Die Urbilder aller Geraden durch v unter α_4

schneiden sich dann in einem Punkt z aus $\langle x, y\rangle$. Dieser ist das Urbild von v unter α. Damit ist α eine Kollineation von R_1 nach R_2. $\square$

KAPITEL 3

Zentrale Begriffe und Ergebnisse dieser Arbeit

In diesem Kapitel werden die Begriffe $(n, k)-$Ovoidraum, $(n, k)-$Cap und Veronesemannigfaltigkeit definiert. Damit lassen sich dann im letzten Abschnitt dieses Kapitels die Hauptergebnisse dieser Arbeit formulieren.

3.1. $(n, k)-$Caps und $(n, k)-$Ovoidräume

Die folgende Definition verallgemeinert die Begriffe "quadric veronesean cap" aus [**TM1**] und "Hermitian cap" aus [**CTM**].

3.1.1. Definition. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und gelte $2 \leq k$. Dann ist ein $(n, k)-$*Cap* eine erzeugende Teilmenge X eines n-dimensionalen projektiven Raumes Π zusammen mit einer Menge von k-dimensionalen Unterräumen Ξ, so dass für alle $\xi \in \Xi$ der Schnitt $X \cap \xi$ ein ξ erzeugendes Ovoid ist und die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(C1) Je zwei Punkte $x, y \in X$ sind in einem eindeutig bestimmten $\xi \in \Xi$ enthalten, welches wir $\xi(x, y)$ nennen.

(C2) Wenn $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ und $\xi_1 \neq \xi_2$ gilt, dann ist $\xi_1 \cap \xi_2 \subseteq X$.

(C3) Für $x \in X$ und $\xi \in \Xi$ mit $x \notin \xi$ sind alle Tangentialräume $T_x(\xi(x, y) \cap X)$ mit $y \in X \cap \xi$ in einem gemeinsamen $(2k - 2)$-dimensionalen Unterraum $T(x, \xi)$ enthalten.

3.1.2. Bemerkung. (1) *Die k-Räume $\xi \in \Xi$ nennen wir elliptische Räume. Den $n-$Raum Π nennen wir umgebenden Raum.*

(2) *Jede Gerade aus Π enthält höchstens zwei Punkte aus X, weil eine Gerade, die zwei Punkte $x, y \in X$ enthält, in dem nach (C1) existierenden elliptischen Raum $\xi(x, y)$ enthalten ist, und $X \cap \xi(x, y)$ ein Ovoid ist. Also ist ein (n, k)-Cap ein Cap.*

(3) *Damit ist klar, dass sich zwei elliptische Räume höchstens in einem Punkt schneiden können, denn sonst enthielte der Schnitt eine Gerade, die nach (C2) in X enthalten sein müsste.*

(4) *Wenn wir voraussetzen, dass sich je zwei elliptische Räume in mindestens einem Punkt schneiden, erhalten wir eine projektive Ebene.*

(5) *Wenn unser Cap eine projektive Ebene ist, enthält $T(x, \xi)$ bereits alle Tangenten an x, da jeder elliptische Raum ξ schneidet. Daher gibt es dann keinen Unterschied zwischen $T(x, \xi)$ und $T(x)$, dem Raum aller Tangenten an x.*

3.1.3. Definition. Sei (X,Ξ) ein $(n,k)-$Cap und sei $\xi \in \Xi$ ein elliptischer Raum. Dann nennen wir das Ovoid $L = \xi \cap X$ einen *Block*. Das Tripel $(X,\Xi,\mathcal{L})$ bezeichnet dann das $(n,k)-$Cap (X,Ξ) mit der Menge der Blöcke $\mathcal{L} := \{\xi \cap X \mid \xi \in \Xi\}$.
Wenn wir das $(n,k)-$Cap in seiner Eigenschaft als Inzidenzgeometrie ansprechen, ohne seine Einbettung in Π näher zu betrachten, schreiben wir auch $(X,\mathcal{L})$ und meinen dann auch nur die Inzidenzgeometrie.

3.1.4. Definition. Sei (X,Ξ) ein (n,k)-Cap. Ein *Untercap* von (X,Ξ) ist ein $(n',k')-$Cap (Y,Ψ) so, dass $Y \subseteq X$ gilt und für alle $\psi \in \Psi$ ein $\xi \in \Xi$ mit $\psi \subseteq \xi$ existiert.

3.1.5. Definition. Ein (n,k)-*Ovoidraum vom Index* i ist eine erzeugende Teilmenge X eines n-dimensionalen projektiven Raumes Π zusammen mit einer Menge $\mathcal{L}$ von $(k-1)$-dimensionalen Ovoiden so, dass $\bigcup \mathcal{L} = X$ gilt und $(X,\mathcal{L})$ ein projektiver Raum der Dimension i ist.

Wir werden uns hauptsächlich mit dem Fall Index 2 beschäftigen und die Ergebnisse dann mit Satz 3.4.5 auf Ovoidräume mit beliebigem Index übertragen. Daher die folgende Definition:

3.1.6. Definition. Eine (n,k)-*Ovoidebene* ist ein (n,k)-Ovoidraum vom Index 2.

3.1.7. Bemerkung.

(1) *Wir werden in Proposition 4.2.2 sehen, dass jedes $(n,k)-$Cap ein projektiver Raum ist. Damit ist jedes $(n,k)-$Cap auch ein Ovoidraum. Umgekehrt werden wir in Satz 3.4.4 noch einsehen, dass es reicht Axiom (C2) hinzuzufügen, damit eine $(n,k)-$Ovoidebene ein $(n,k)-$Cap ist. Ob beliebige $(n,k)-$Ovoidebenen auch $(n,k)-$Caps oder Quotienten von $(n,k)-$Caps sind, ist noch unbekannt.*
(2) *Die Geraden einer $(n,k)-$Ovoidebene nennen wir Blöcke, um sie begrifflich von Geraden des Raumes Π zu unterscheiden. Für zwei Punkte x,y bezeichnen wir mit $L(x,y)$ den eindeutig bestimmten Verbindungsblock.*
(3) *In Kapitel 5 werden wir einige Aussagen über $(n,k)-$Ovoidebenen beweisen, die dann für $(n,k)-$Caps und Veronesemannigfaltigkeiten erst Recht gelten. Daher wird in diesem Kapitel und in Kapitel 4 gelegentlich ein Ergebnis aus Kapitel 5 zitiert. Die Gefahr eine Zirkelschlusses besteht dadurch nicht.*

3.1.1. Isomorphie und Äquivalenz.

3.1.8. Definition. Da Ovoidräume Inzidenzgeometrien sind, bezeichnen wir zwei Ovoidräume über dem selben Grundkörper als *isomorph*, wenn sie als Geometrien isomorph sind. Wir bezeichnen Ovoidräume als *äquivalent*, wenn es eine Kollineation des umgebenden Raumes Π gibt, die zugleich ein Isomorphismus der Ovoidräume als Inzidenzgeometrien ist.

Diese Definition gilt auch für $(n,k)-$Caps, die nach Proposition 4.2.2 auch Ovoidräume sind. Aus dieser Definition folgt direkt, dass jede Äquivalenz auch eine Isomorphie ist. In dieser

Arbeit ist es eines der wichtigsten Ergebnisse, einzusehen, dass in vielen Fällen umgekehrt aus der Isomorphie die Äquivalenz folgt. Als Vorbereitung dafür zeigen wir jetzt, dass bereits eine Äquivalenz von $(n, k)-$Caps vorliegt, wenn eine Kollineation des umgebenden Raumes die Punktmenge eines (n, k)-Caps auf die Punktmenge des anderen (n, k)-Caps abbildet.

3.1.9. LEMMA. *Sei (X, ξ) ein $(n, k)-$Cap. Seien $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ vier paarweise verschiedene Punkte, deren Aufspann ein $2-$Raum ist. Dann liegen x_1, x_2, x_3, x_4 in einem gemeinsamen elliptischen Raum.*

Beweis: Nehmen wir an, $\xi(x_1, x_2)$ und $\xi(x_3, x_4)$ seien verschieden. Dann gilt nach (C2):

$$p := \langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle x_3, x_4 \rangle \subseteq \xi(x_1, x_2) \cap \xi(x_3, x_4) \subset X.$$

Da X ein Cap ist, ist damit $p \in \{x_1, x_2\} \cap \{x_3, x_4\}$. Also sind die vier Punkte nicht paarweise verschieden, ein Widerspruch. Somit sind die vier Punkte im gemeinsamen elliptischen Raum $\xi(x_1, x_2) = \xi(x_3, x_4)$ enthalten. □

3.1.10. LEMMA. *Seien (X, Ξ) und (Y, Ψ) zwei $(n, k)-$Caps mit einer Kollineation $\alpha : P_n\mathbb{K} \to P_n\mathbb{K}$ mit $X^\alpha = Y$. Dann ist α eine Äquivalenz.*

Beweis: Da α als Kollineation den Schnitt zweier elliptischer Räume auf den Schnitt der Bildräume abbildet, bleibt nur noch zu zeigen, , dass für alle $\xi \in \Xi$ das Bild ξ^α ein elliptischer Raum aus Ψ ist:
Weil α eine Kollineation ist, ist ξ^α ein $k-$Raum, der Y in einem Ovoid der Dimension $k - 1$ schneidet. Nach Lemma 3.1.9 liegen vier Punkte aus Y, die in einem $2-$Raum liegen, bereits in einem Raum $\psi \in \Psi$. Also liegen alle Punkte aus $\xi^\alpha \cap Y$ im selben $\psi \in \Psi$. □

Trotz dieses Ergebnisses ist Isomorphie ein schwächerer Begriff als Äquivalenz. Ein Gegenbeispiel, dass sich nicht jeder Isomorphismus zu einer Äquivalenz fortsetzen lässt, erhalten wir, wenn wir die komplexe Ebene $P_2\mathbb{C}$ betrachten. Es existiert nach [**SGHL**, Theorem 14.11 und Theorem 14.12] ein nicht-stetiger Automorphismus der komplexen Zahlen. Dieser induziert einen nicht-stetigen Automorphismus ω von $P_2\mathbb{C}$. Wenn wir $P_2\mathbb{C}$ mit der Veroneseeinbettung v (siehe Abschnitt 3.3) in den $P_8\mathbb{R}$ einbetten, erhalten wir ein $(8, 3)-$Cap. Ließe sich $v^{-1}\omega v$ zu einer Äquivalenz fortsetzen, erhielten wir eine nicht-stetige Kollineation des $P_8\mathbb{R}$. Diese hätte einen nicht-stetigen assozierten Automorphismus der reellen Zahlen, und ein solcher existiert nach [**SGHL**, Theorem 6.4] nicht.

Ein dritter, noch stärkerer Begriff ist die *lineare Äquivalenz*, womit gemeint ist, dass es eine lineare Kollineation des umgebenden Raumes Π gibt, die eines der Caps auf das andere abbildet.

3.2. Allgemeines über $(n, k)-$Ovoidebenen

Hier wollen wir einige Feststellungen über $(n, k)-$Ovoidebenen vornehmen, die nicht nur für Kapitel 5, das sich mit $(n, k)-$Ovoidebenen beschäftigt, sondern auch für Kapitel 4, das sich

mit $(n, k)-$Caps beschäftigt wichtig sind.
Sei für diesen Abschnitt $(X, \mathcal{L})$ eine $(n, k)-$Ovoidebene gemäß Definition 3.1.6. Damit ist X eine erzeugende Teilmenge des n-dimensionalen projektiven Raumes $P_n\mathbb{K}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\mathcal{L}$ ist eine Menge von $(k-1)$-dimensionalen Ovoiden, so dass $\bigcup \mathcal{L} = X$ gilt und $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene ist.
Wir setzen voraus, dass $\mathbb{K}$ mindestens drei Elemente hat, also dass auf jeder Geraden in $P_n\mathbb{K}$ mindestens vier Punkte liegen. Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ existiert genau ein Block $L(x, y) \in \mathcal{L}$, der x und y enthält.
Da jeder Block $L \in \mathcal{L}$ ein Ovoid in $\langle L \rangle$ ist, hat jeder Punkt $x \in L$ einen $(k-1)-$dimensionalen Tangentialraum $T_x(L) \leq \langle L \rangle$. Zwei Blöcke $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ schneiden sich nach Definition in genau einem Punkt.
Wir definieren mit $T(x) := \langle \bigcup_{L \in \mathcal{L}_x} T_x(L) \rangle$ den von allen Tangentialräumen an x erzeugten Raum.

3.2.1. Lemma. *Sei $L \in \mathcal{L}$ und $x \in X \backslash L$. Dann gilt $P_n\mathbb{K} = \langle T(x), L \rangle$.*

Beweis: Sei $y \in X \backslash \{x\}$. Dann gilt $\langle L(x, y) \rangle = \langle T_x(L(x, y)), L(x, y) \cap L \rangle \subseteq \langle T(x), L \rangle$, weil $L(x, y) \cap L$ nicht in $T_x(L(x, y))$ liegen kann und $T_x(L(x, y))$ eine Hyperebene in $\langle L(x, y) \rangle$ ist. Da y beliebig war, ist mit y ganz X in $\langle T(x), L \rangle$ enthalten. Damit ist auch $P_n\mathbb{K} = \langle X \rangle \subseteq \langle T(x), L \rangle$ gezeigt. $\square$

3.2.1. Zentralprojektionen und $(n, k)-$Ovoidebenen. In diesem Abschnitt führen wir mit einer Zentralprojektion, deren Zentrum ein Block einer Ovoidebene ist, eine für diese Arbeit sehr wichtige Abbildung ein, und betrachten ihre Wirkung auf die Ovoidebene.
Sei L_0 ein Block, sei U ein $(n-k-1)$-dimensionaler Unterraum von $P_n\mathbb{K}$, disjunkt zu $\langle L_0 \rangle$. Dann ist $\langle U, L_0 \rangle = P_n\mathbb{K}$. Sei $\rho : P_n\mathbb{K} \backslash \langle L_0 \rangle \to U$ die Projektion auf U mit Zentrum $Z = \langle L_0 \rangle$, d.h. $p^\rho := \langle L_0, p \rangle \cap U$.
Für eine Teilmenge $M \subseteq P_n\mathbb{K}$ definieren wir $M^\rho = (M \backslash (\langle L_0 \rangle \cap M))^\rho$.

3.2.2. Lemma. *Seien ρ eine Zentralprojektion mit Zentrum Z und $M \subseteq P_n\mathbb{K}$. Dann gilt $\langle M^\rho \rangle = \langle M \rangle^\rho$.*

Beweis: $\langle M^\rho \rangle = \langle Z, M^\rho \rangle \cap U = \langle Z, M \rangle \cap U = \langle M \rangle^\rho$. $\square$

3.2.3. Lemma. *Seien ρ eine Projektion mit Zentrum Z und $R \leq P_n\mathbb{K}$ ein d-dimensionaler Teilraum. Dann ist $\dim R^\rho = d - 1 - \dim(Z \cap R)$.*

Beweis: Offenbar gilt $\langle Z, R \rangle = \langle Z, R^\rho \rangle$. Da Z und R^ρ disjunkt sein müssen, gilt damit die Gleichung $\dim Z + d - \dim(Z \cap R) = \dim Z + \dim R^\rho + 1$, also $\dim R^\rho = d - 1 - \dim Z \cap R$. $\square$

3.2.4. Lemma. *Seien $M \in \mathcal{L} \backslash \{L_0\}$, $p := M \cap L_0$ und $a \in \langle M \rangle \backslash (T_p(M) \cup \langle L_0 \rangle)$. Dann existiert ein Punkt $x \in M$, so dass $a^\rho = x^\rho$ gilt.*

Beweis: Wegen $a \notin T_p(M)$ ist $\langle p, a\rangle$ eine Sekante. Daher existiert ein Punkt $x := \langle p, a\rangle \cap M\backslash\{p\}$ und es gilt $x^\rho = \langle L_0, x\rangle \cap U = \langle L_0, a\rangle \cap U = a^\rho$. □

3.2.5. LEMMA. *Eine Projektion ρ mit Zentrum $\langle L_0\rangle$ bildet jedes Ovoid K, dessen Aufspann $\langle L_0\rangle$ nur in dem einen Punkt $p = L_0 \cap K$ schneidet, bijektiv auf einen affinen $(k-1)-$Raum ab. Der Tangentialraum an K in p wird auf den zugehörigen unendlich fernen $(k-2)-$Raum abgebildet.*

Beweis: Nach Lemma 3.2.3 ist $T_p(K)^\rho$ ein $(k-2)-$Raum und nach Lemma 3.2.4 gilt weiterhin $\langle K^\rho\rangle = K^\rho \cup T_p(K)^\rho$. Es bleibt zu zeigen, dass $T_p(K)^\rho$ und K^ρ disjunkt sind: Sei $t \in T_p(K)\backslash\langle L_0\rangle$ und $a \in \langle K\rangle\backslash T_p(K)$. Dann gilt $t^\rho \neq a^\rho$, denn wegen $a \notin T_p(K)$ gilt $a \notin \langle t, p\rangle = \langle L_0, t\rangle \cap \langle K\rangle = t^{\rho^{-1}} \cap \langle K\rangle$. □

3.2.6. KOROLLAR. *Sei g eine Gerade in U, die mindestens zwei Punkte aus X^ρ enthält. Dann ist g bis auf höchstens einen Punkt in X^ρ enthalten.*

Beweis: Seien x_1^ρ und x_2^ρ zwei verschiedene Punkte aus $g \cap X^\rho$. Dann ist g in $\langle L(x_1, x_2)^\rho\rangle$ enthalten. Die Gerade $\langle x, y\rangle \subseteq \langle L(x, y)\rangle$ wird auf die Gerade g abgebildet. Nach Lemma 3.2.3 enthält $\langle x, y\rangle$ keinen Punkt aus $\langle L_0\rangle$, sonst würde $\langle x, y\rangle$ auf einen Punkt abgebildet. Da $\langle x, y\rangle$ eine Sekante ist, ist $p = \langle x, y\rangle \cap T_{L(x,y)\cap L_0}(L(x, y))$ nur ein Punkt. Damit ist $g\backslash\{p^\rho\}$ nach Lemma 3.2.4 in X^ρ enthalten. □

3.3. Die Veroneseeinbettung

Sei $\mathbb{F}$ eine alternative Divisonsalgebra der Dimension $k-1$ über $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathbb{F})$ und sei $x \mapsto \bar{x}$ ein involutorischer Antiautomorphismus von $\mathbb{F}$ mit Fixkörper $\mathbb{K}$. Das heißt, es gilt $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ und $\overline{\overline{x}} = x$ für alle $x, y \in \mathbb{F}$ und $\overline{r} = r$, genau dann, wenn $r \in \mathbb{K}$. Damit gilt automatisch $\overline{x}x = x\overline{x} \in \mathbb{K}$. Wir wollen jetzt einen projektiven Raum über $\mathbb{F}$ in einen höher dimensionalen projektiven Raum über $\mathbb{K}$ einbetten. Das Bild dieser Einbettung nennen wir Veronesemannigfaltigkeit. Dabei unterscheiden wir den nicht-desarguesschen vom desarguesschen Fall, in dem die Dimension des projektiven Raumes über $\mathbb{F}$ eine beliebige natürliche Zahl, größer oder gleich zwei sein kann. Diese Dimension bezeichnen wir als Index der Veronesemannigfaltigkeit. Die für den nicht-desarguesschen Fall vorgeführte Konstruktion funktioniert ebenfalls im desarguesschen Fall und stimmt mit der für den desarguesschen Fall vorgestellten überein. Die Konstruktion im desarguesschen Fall ist wegen ihrer Direktheit einfacher anzuwenden, daher zeigen wir hier beide Verfahren.
Für $k = 2$ gelten $\mathbb{K} = \mathbb{F}$ und $\bar{x} = x$. Wir sprechen dann von der *quadratischen Veronesemannigfaltigkeit.*

3.3.1. Definition der Veroneseeinbettung im desarguesschen Fall. Wir setzen voraus, dass $\mathbb{F}$ assoziativ ist. Dann ist $P_i(\mathbb{F})$ ein desarguesscher projektiver Raum, den wir mit einer bestimmten Abbildung, der *Veroneseeinbettung*, in den $P_n\mathbb{K}$ einbetten wollen.
Die hermiteschen $(i+1)\times(i+1)$ Matrizen über $\mathbb{F}$, also $M \in \mathbb{F}^{(i+1)\times(i+1)}$ mit $\overline{M}^T = M$, bilden einen Vektorraum $H(i+1,\mathbb{F})$ der Dimension $\frac{1}{2}i(i+1)(k-1)+i+1 = \frac{1}{2}(k-1)i^2+\frac{1}{2}(k+1)i+1$ über $\mathbb{K}$. Dieser definiert einen $n := \frac{1}{2}(k-1)i^2+\frac{1}{2}(k+1)i$ dimensionalen desarguesschen projektiven Raum $PH(i+1,\mathbb{F}) \cong P_n\mathbb{K}$. Da diese von i und k abhängige Dimension in dieser Arbeit noch häufig verwendet wird, definieren wir für $i,k \in \mathbb{N}$ die Zahl $N(i,k) := \frac{1}{2}(k-1)i^2+\frac{1}{2}(k+1)i$.
Weil der projektive Raum $P_i(\mathbb{F})$ desarguessch ist, können wir Punkte $x \in P_i(\mathbb{F})$ mit homogenen Koordinaten $x = [x_0, x_1, \ldots, x_i]$ mit $(x_0, x_1, \ldots, x_i) \in \mathbb{F}^{i+1}\backslash\{(0,\ldots,0)\}$ beschreiben.
Wir definieren die Abbildung

$$v : P_i(\mathbb{F}) \to PH(i+1,\mathbb{F}),$$
$$[x]^v := [\bar{x}^T x].$$

Diese Abbildung heißt Veroneseeinbettung oder auch Veroneseabbildung. Das Bild $P_i\mathbb{F}^v$ nennen wir die von $\mathbb{F}$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit und bezeichnen diese mit $V_\mathbb{F}$. Wir sehen sofort, dass $\bar{x}^T x$ eine hermitesche Matrix vom Rang 1 ist.

3.3.1. Lemma. *Die Veroneseeinbettung v ist wohldefiniert.*

Beweis: Sei $q \in \mathbb{F}, [x] \in P_i(\mathbb{F})$. Dann ist $\bar{q}q \in \mathbb{K} \subseteq Z(\mathbb{F})$ und es gilt die Gleichung

$$[qx]^v = [\overline{qx}^T qx] = [\bar{x}^T \bar{q}qx] = [\bar{q}q\bar{x}^T x] = [\bar{x}^T x] = [x]^v.$$

□

3.3.2. Lemma. *Als Abbildung von $P_i\mathbb{F}$ in die Menge der von hermiteschen Rang 1 Matrizen erzeugten Punkte ist v bijektiv.*

Beweis: Injektivität: Sei $[x]^v = [y]^v$. Weil $A = \bar{x}^T x$ eine hermitesche Rang 1 Matrix ist, gibt es einen von 0 verschiedenen Diagonaleintrag. Deswegen können wir OBdA. $a_{00} = 1 = x_0 = y_0$ wählen. Durch diese Normierung erhalten wir das Gleichungssystem

$$\forall j,k \in \{0,\ldots,i\} : \bar{x}_j x_k = \bar{y}_j y_k$$

und dementsprechend mit $1 = x_0 = y_0$ auch für alle $j \in \{0,\ldots,i\}$ die Gleichung $x_j = y_j$. Damit gilt: $x = y$.
Surjektivität: Sei A eine hermitesche Rang 1 Matrix. Wie oben können wir $a_{00} = 1$ annehmen. Dann hat A die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \overline{a_{11}} & \overline{a_{11}}a_{11} & \ldots & \overline{a_{11}}a_{1i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1i}} & \overline{a_{1i}}a_{11} & \ldots & \overline{a_{1i}}a_{1i} \end{pmatrix},$$

und es gilt $A = (1, \overline{a_{11}}, \ldots, \overline{a_{1i}})^T \cdot (1, a_{11}, a_{1i})$. Also ist $[A] \in P_i(\mathbb{F})^v$. □

3.3.3. LEMMA. *Falls $\mathbb{K} = Z(\mathbb{F})$ gilt, induzieren alle Kollineationen auf $P_i(\mathbb{F})$, deren assoziierter $\mathbb{F}-$Automorphismus mit der Konjugation vertauscht, Isomorphismen von $V_\mathbb{F}$, die sich zu Kollineationen von $P_n\mathbb{K}$ fortsetzen lassen.*

Beweis: Sei $A \in \mathrm{Gl}(\mathbb{F}, \mathrm{i}+1)$ und θ ein Schiefkörperautomorphismus von $\mathbb{F}$. Dann gilt die Gleichung $\left[x^\theta A\right]^v = \left[\overline{A}^T \overline{x^\theta}^T x^\theta A\right] = \left[\overline{A}^T (\overline{x}^T x)^\theta A\right]$. Wir können dies durch $[y] \mapsto [y^f]$ mit $y^f := \overline{A}^T y^\theta A$ zu einer Abbildung auf $PH(i+1, \mathbb{F})$ fortsetzen. Wegen $\mathbb{K} = Z(\mathbb{F})$ gilt $\mathbb{K}^\theta = \mathbb{K}$, und wir berechnen für beliebige $y, z \in H(i+1, \mathbb{F}), r \in \mathbb{K}$ das Bild der Linearkombination $(ry+z)^f = \overline{A}^T (ry+z)^\theta A = r^\theta y^f + z^f$. Somit ist f semilinear und induziert eine Kollineation auf $P_n\mathbb{K}$, die die gegebene Kollineation von $P_i(\mathbb{F})$ fortsetzt. □

Dieses Lemma besagt, dass sich im Sonderfall $k = 2$ alle Kollineationen des $P_i(\mathbb{F})$ zu Kollineationen des $P_n\mathbb{K}$ fortsetzen lassen, denn dann ist die Konjugation die Identität, die mit jeder Abbildung vertauscht, und es gilt $\mathbb{K} = \mathbb{F}$, womit aus der Voraussetzung $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathbb{F})$ bereits $\mathbb{K} = Z(\mathbb{F})$ folgt.
Im allgemeinen lassen sich zumindest lineare Isomorphismen fortsetzen:

3.3.4. LEMMA. *Die von $\mathbb{F}$-linearen Abbildungen induzierten Isomorphismen von $V_\mathbb{F}$ lassen sich zu linearen Kollineationen von $P_n\mathbb{K}$ fortsetzen.*

Beweis: Sei $A \in \mathrm{Gl}(\mathbb{F}, \mathrm{i}+1)$, $[x] \in P_i(\mathbb{F})$. Dann ist $[xA]^v = \left[\overline{A}^T \overline{x}^T x A\right]$. Wir können dies zu einer Abbildung f auf $PH(i+1, \mathbb{F})$ fortsetzen durch $[y]^f := [\overline{A}^T yA]$. Weil $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathbb{F})$ gilt, ist $y \mapsto \overline{A}^T yA$ eine $\mathbb{K}-$lineare Abbildung. Daraus folgt, dass f eine lineare Kollineation ist. □

3.3.5. KOROLLAR. *Die Bilder unter v von zwei Geraden aus $P_i\mathbb{F}$ sind zueinander linear äquivalent.*

Beweis: Zu zwei Geraden in $P_i\mathbb{F}$ gibt es eine lineare Abbildung der Moufangebene $P_i\mathbb{F}$, die eine auf die andere abbildet. Diese lässt sich nach Lemma 3.3.4 zu einer linearen Abbildung des $P_n\mathbb{K}$ fortsetzen. □
Lemma 3.3.4 sorgt nicht nur dafür, dass die Bilder einzelner Geraden linear aufeinander abgebildet werden können:
Da $P_i(\mathbb{F})$ desarguessch ist, ist die Gruppe der von $\mathbb{F}$-linearen Abbildungen induzierten Kollineationen auf $P_2(\mathbb{F})$ transitiv auf $(i+2)-$Tupeln in allgemeiner Lage. Daher ermöglicht uns Lemma 3.3.4, einige Eigenschaften zunächst für eine Gerade mit angenehmen Koordinaten zu zeigen und dann auf alle Geraden zu schließen.
Um die folgenden Beweise von riesigen, fast nur mit Nullen gefüllten Matrizen frei zu halten, führen wir die folgende Notation ein: Für eine quadratische Matrix A, die kleiner als $(i+1) \times (i+1)$ ist, sei A^0 die $(i+1) \times (i+1)$ Matrix, deren obere linke Teilmatrix der passenden Größe A ist und deren übrigen Einträge 0 sind.

3.3.6. Lemma. *Die Gerade* $\langle [1,0,\ldots,0],[0,1,\ldots,0]\rangle_{\mathbb{F}}$ *aus* $P_i\mathbb{F}$ *wird auf eine Quadrik* L *abgebildet, so dass* $\langle L\rangle$ *ein* $k-$*Raum ist und in passend gewählten homogenen Koordinaten* $L = \left\{[r,s,\ldots,q_{k-1}] \in \langle L\rangle \mid sr = (q_1,\ldots,q_{k-1})\overline{(q_1,\ldots,q_{k-1})}\right\}$ *gilt.*

Beweis: Sei L das Bild der Geraden $\langle [1,0,\ldots,0],[0,1,\ldots,0]\rangle_{\mathbb{F}}$. Für $(a,b) \in \mathbb{F}^2\backslash\{(0,0)\}$ gilt

$$[a,b,0]^v = \begin{bmatrix} \bar{a}a & \bar{a}b \\ \bar{b}a & \bar{b}b \end{bmatrix}^0 \in \left\{ \begin{bmatrix} r & q \\ \bar{q} & s \end{bmatrix}^0 \mid r,s \in \mathbb{K}, q \in \mathbb{F} \right\} =: R.$$

Offensichtlich ist $R = \langle L\rangle$ ein $k-$Raum und kann mit homogenen $\mathbb{K}-$Koordinaten durch $\begin{bmatrix} r & q \\ \bar{q} & s \end{bmatrix} = [r,s,q_1,\ldots,q_{k-1}]$ mit $q = (q_1,\ldots,q_{k-1}) \in \mathbb{F} = \mathbb{K}^k$ beschrieben werden. Dann ist $[r,s,q_1,,\ldots,q_{k-1}] \in L$ genau dann, wenn $sr = (q_1,,\ldots,q_{k-1})\overline{(q_1,,\ldots,q_{k-1})}$ gilt. □

Mit Hilfe der Fortsetzbarkeit linearer Kollineationen (Lemma 3.3.4) und dem Wissen, dass Quadriken, die keine Gerade enthalten, Ovoide sind (Lemma 2.2.28), folgern wir aus diesem Lemma, dass alle Geraden auf Ovoide abgebildet werden:

3.3.7. Lemma. *Falls die Charakteristik von* $\mathbb{K}$ *nicht zwei ist, wird jede Gerade aus* $P_i(\mathbb{F})$ *von* v *auf ein* $(k-1)-$*dimensionales Ovoid abgebildet.*

Beweis: Nach Lemma 3.3.6 ist $L = \langle [1,0,\ldots,0],[0,1,\ldots,0]\rangle_{\mathbb{F}}^v$ eine Quadrik. Nach Lemma 2.2.28, ist L dann ein Ovoid, wenn L ein Cap ist, was wir im Folgenden zeigen:
Wir können die Punkte aus $\langle L\rangle$ wie in Lemma 3.3.6 mit homogenen Koordinaten $[a,b,q]$ mit $a,b \in \mathbb{K}, q \in \mathbb{F}$ darstellen.
Sei g eine Gerade in $\langle L\rangle$, die die zwei verschiedenen Punkte $y = [a_1,a_2,q]$ und $[1,0,0]$ aus L enthält. Dann enthält g auch den Punkt $z = [a_1+1,a_2,q]$. Annahme $z \in L$, dann gilt $q\bar{q} = (a_1+1)a_2 = q\bar{q} + a_2$ und somit $a_2 = 0$. Wegen $a_2 = q\bar{q}$ bedeutet das, dass $q = 0$ gilt. Somit ist $y = [1,0,0]$ und wir haben einen Widerspruch. Daher kann g nicht in L enthalten sein, hat also höchstens zwei Schnittpunkte mit L.
Sei h eine Gerade in $\langle L\rangle$, die zwei beliebige Punkte x' und y' aus L enthält. Es gibt eine von einer $\mathbb{F}$-linearen Abbildung induzierte Kollineation auf $P_i(\mathbb{F})$, die $x'^{v^{-1}}$ auf $[1,0,0]^{v^{-1}}$ und $y'^{v^{-1}}$ auf $y^{v^{-1}}$ abbildet. Daher kann nach Lemma 3.3.4 auch h nur zwei Punkte aus L enthalten und L ist nach Lemma 2.2.28 ein Ovoid.
Sei L' das Bild einer beliebigen Gerade von $P_i(\mathbb{F})$. Dann gibt es eine von einer $\mathbb{F}$-linearen Abbildungen induzierte Kollineationen auf $P_i(\mathbb{F})$, die $L^{v^{-1}}$ auf $L'^{v^{-1}}$ abbildet. Nach Lemma 3.3.4 lässt sich diese zu einer Kollineation von $PH(3,\mathbb{F})$ fortsetzen, und L' ist das Bild von L unter einer Kollineation. Deshalb muss L' auch ein Ovoid sein. □

3.3.8. Definition. Die Bilder von Geraden von $P_i(\mathbb{F})$ nennen wir *Blöcke.* Mit $\mathcal{L}$ bezeichnen wir die Menge aller Blöcke und definieren $\Xi := \{\langle L\rangle \mid L \in \mathcal{L}\}$.

3.3.9. Lemma. *Falls die Charakteristik von* $\mathbb{K}$ *nicht zwei ist, ist das Tripel* $V_{\mathbb{F}} := (P_2(\mathbb{F})^v, \Xi, \mathcal{L})$ *ein* $(n,k)-$*Cap.*

Beweis: C1 ist offensichtlich erfüllt. Für C2 ist zu zeigen, dass sich die Aufspanne zweier sich schneidender Blöcke in nur einem Punkt schneiden, und dass die Aufspanne zweier disjunkter Blöcke, sich nicht schneiden. Im ersten Fall reicht es nach Lemma 3.3.4, die beiden sich schneidenden Ovoide $L_1 := \langle [1,0,\ldots,0],[0,1,\ldots,0]\rangle_{\mathbb{F}}^v$ und $L_2 := \langle [0,1,\ldots,0],[0,0,1\ldots,0]\rangle_{\mathbb{F}}^v$ zu betrachten. Dann hat jeder Punkt aus $\langle L_1\rangle$ die Form $\begin{bmatrix} r & q & 0 \\ \bar{q} & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^0$ und jeder Punkt aus $\langle L_2\rangle$ hat die Form $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & p \\ 0 & \bar{p} & b \end{bmatrix}^0$. Der einzige Schnittpunkt ist dann

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^0 = L_1 \cap L_2.$$

Im zweiten Fall reicht es nach Lemma 3.3.4, die beiden sich nicht schneidenden Ovoide $L_1 = \langle [1,0,\ldots,0],[0,1,\ldots,0]\rangle_{\mathbb{F}}^v$ und $L_3 = \langle [0,0,1,\ldots,0],[0,0,0,1\ldots,0]\rangle_{\mathbb{F}}^v$ zu betrachten. Durch betrachten der Matrixdarstellung wie im ersten Fall erkennen wir sofort, dass sich $\langle L_1\rangle$ und $\langle L_3\rangle$ nicht schneiden. Damit ist C2 gezeigt.

Bleibt noch C3 zu zeigen, also, dass die Tangenten in einen Punkt an Blöcke, die einen bestimmten Block L schneiden, in einem $(2k-2)-$Raum enthalten sind. Nach Lemma 3.3.4 reicht es den Punkt $x = [1,0,\ldots,0]^v$ und den x nicht enthaltenden Block $L := L([0,1,0,\ldots,0]^v,[0,0,1,\ldots,0]^v)$ zu betrachten. Sei M ein Block durch x, der L im Punkt $[0,1,q,\ldots,0]^v \in L\backslash\{[0,0,1,0,\ldots,0]^v\}$ schneidet. Ein Punkt in M hat also die Form

$$[s,t,tq,0,\ldots,0]^v = \begin{bmatrix} \bar{s}s & \bar{s}t & \bar{s}tq \\ \bar{t}s & \bar{t}t & \bar{t}tq \\ \bar{q}\bar{t}s & \bar{q}\bar{t}t & q\bar{q}t\bar{t} \end{bmatrix}^0.$$

Sei nun $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}\}$ eine Basis von $\mathbb{F}$ als $\mathbb{K}-$Vektorraum. Dann sind die Geraden $\langle x, y_j\rangle$ mit

$$y_j := \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j & \alpha_j q \\ \overline{\alpha_j} & 0 & 0 \\ \overline{\alpha_j q} & 0 & 0 \end{bmatrix}^0, j \in \{1,\ldots,k-1\}$$

Tangenten an x in M, denn es gelten
$y_j \in \langle [0,1,q,0,\ldots,0]^v, x, [1,\alpha_j,\alpha_j q,0,\ldots,0]^v\rangle \subseteq \langle M\rangle$ und $\langle x, y_j\rangle \cap M = x$.
Da M ein Ovoid ist, ist damit der $(k-1)-$Raum $\langle x, y_1,\ldots,y_{k-1}\rangle$ der Tangentialraum $T_x(M)$ an x in $\langle M\rangle$.
Durch Variation von q erhalten wir den $(2k-2)-$Raum:

$$T(x,\langle L\rangle) = \left\{ \begin{bmatrix} r & s & t \\ \bar{s} & 0 & 0 \\ \bar{t} & 0 & 0 \end{bmatrix}^0 \mid r \in \mathbb{K}, s,t \in \mathbb{F} \right\}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Tangentialraum in x an $N = L(x, [0,0,1,0,\ldots,0]^v)$ ebenfalls in diesem Raum enthalten ist. Die Punkte aus N haben die Form

$$[1,0,t,0,\ldots,0]^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{t} & 0 & |t|^2 \end{bmatrix}^0 .$$

Wie oben berechnen wir den Tangentialraum $T_x(N)$. Dabei erhalten wir den in $T(x, \langle L \rangle)$ enthaltenen Raum

$$T_x(N) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^0, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^0, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_k \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_k & 0 & 0 \end{bmatrix}^0 \right\rangle .$$

□

Da wir in dieser Arbeit mit Objekten arbeiten wollen, von denen wir erst zeigen müssen, dass es sich um Veronesemannigfaltigkeiten handelt, werden wir die zahlreichen guten Eigenschaften von Veronesemannigfaltigkeiten kaum verwenden können. Wenn wir aber von einem $(n,k)-$Cap zeigen wollen, dass es eine Veronesemannigfaltigkeit ist und wir Untercaps von kleinerem Index oder mit kleinerem k finden, von denen wir bereits wissen, dass es sich um Veronesemannigfaltigkeiten handelt, können wir einige gute Eigenschaften dieser Veronesemannigfaltigkeiten ausnutzen. Zu diesem Zweck dienen die folgenden Lemmata.

3.3.10. Lemma. *Sei $L \in \mathcal{L}$, dann ist die Gruppe der linearen Kollineationen $\langle L \rangle \to \langle L \rangle$, die L auf L abbilden dreifach transitiv auf L.*
Beweis: Weil im desarguesschen Raum $P_i\mathbb{F}$ die Gruppe der $\mathbb{F}-$linearen Kollineationen dreifach transitiv auf der Geraden $L^{v^{-1}}$ ist, ist dieses Lemma eine direkte Folgerung von Lemma 3.3.4. □

3.3.11. Bemerkung. *Der Beweis von Lemma 3.3.9 zeigt ausserdem, dass für alle $x \in X$ und $\xi \in \Xi$ mit $x \notin \xi$ die Gleichung $T(x,\xi) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}_x} T_x(L)$ gilt, also dass die Vereinigung der einzelnen Tangentialräume den Raum $T(x,\xi)$ komplett ausfüllt. Die einzelnen Tangentialräume schneiden sich nur im Punkt x.*

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 3.3.9 seien $x := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$ eine Basis von $\mathbb{F}$ als $\mathbb{K}-$Vektorraum und $L := \langle [0,1,0,\ldots,0], [0,0,1,\ldots,0] \rangle_{\mathbb{F}}^v$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $z \in T(x, \langle L \rangle)$. Dann existieren $r \in \mathbb{K}, s, t \in \mathbb{F}$ so, dass

$$z = \begin{bmatrix} r & s & t \\ \bar{s} & 0 & 0 \\ \bar{t} & 0 & 0 \end{bmatrix}^0$$

gilt. Weiterhin gibt es $s_1, \ldots, s_{k-1} \in \mathbb{K}$ mit $s = \sum_{j=1}^{k-1} s_j \alpha_j$ und es gilt

$$\begin{pmatrix} r & s & t \\ \bar{s} & 0 & 0 \\ \bar{t} & 0 & 0 \end{pmatrix}^0 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 + \sum_{j=1}^{k-1} s_j \begin{pmatrix} 0 & \alpha_j & \alpha_j s^{-1} t \\ \bar{\alpha}_j & 0 & 0 \\ \overline{\alpha_j s^{-1} t} & 0 & 0 \end{pmatrix}^0 .$$

Also ist z in $T_x(L(x,[0,1,s^{-1}t,0,\dots,0]^v))$ enthalten. □

3.3.12. Lemma. *Jeder Punkt $a \in PH(i+1,\mathbb{F})$ liegt in einem $i-$Raum $\langle x_1,\dots,x_{i+1}\rangle$, der von Punkten $x_1,\dots,x_{i+1}$ aus der Punktmenge von $V_\mathbb{F}$ aufgespannt wird.*

Beweis: Es gilt $a=[A]$ mit einer hermiteschen $(i+1)\times(i+1)$ Matrix A über $\mathbb{F}$. Wir bezeichnen mit A_1 die erste Zeile und mit a_{11} den ersten Eintrag von A_1. Falls $a_{11}\neq 0$ ist, ist $A(1):=A-(a_{11})^{-1}\overline{A}_1^T A_1$ eine Matrix deren erste Zeile und erste Spalte nur aus Nullen bestehen. Wir können dieses Verfahren iterieren und erhalten eine Matrix
$A(j):=A(j-1)-(A(j-1)_{jj})^{-1}\overline{A}(j-1)_j^T A(j-1)_j$, deren ersten j Zeilen und Spalten nur aus Nullen bestehen und es gilt $A(j)=A(j-1)-A(j)'$, und $x_j:=[A(j)']$ ist in der Punktmenge von $V_\mathbb{F}$ enthalten. Es gilt $A-\sum_{j=1}^{i+1}A(j)'=A(i+1)=0$. Damit ist $a\in\langle x_1,\dots,x_{i+1}\rangle$ bewiesen. □

3.3.13. Lemma. *Falls die Charakteristik von $\mathbb{K}$ nicht zwei ist, liegt jeder Punkt im Aufspann eines Blockes auf einer Sekanten.*

Beweis: Nach Lemma 3.3.4 reicht es, den Block $L:=\langle[1,0,\dots,0],[0,1,0,\dots,0]\rangle_\mathbb{F}^v$ zu betrachten. Wie in Lemma 3.3.6 kann der projektive Raum $\langle L\rangle$ mit homogenen $\mathbb{K}-$Koordinaten durch $\begin{bmatrix} r & q\\ \bar{q} & s\end{bmatrix}^0=[r,s,q_1,\dots,q_{k-1}]$ beschrieben werden. Dann ist $[r,s,q_1,,\dots,q_{k-1}]\in L$ genau dann, wenn $rs=(q_1,,\dots,q_{k-1})\overline{(q_1,,\dots,q_{k-1})}$ gilt. Wir konstruieren für einen beliebigen Punkt
$x:=[a,b,x_1,,\dots,x_{k-1}]\in\langle L\rangle$ eine Sekante, die x enthält:
Wir definieren $|x'|^2:=(x_1,,\dots,x_{k-1})\overline{(x_1,,\dots,x_{k-1})}\in\mathbb{K}$. Falls $b\neq 0$ gilt, sind die Punkte $p=[1,0,0,\dots,0]$ und $q=[|x'|^2b^{-1},b,x_1,\dots,x_{k-1}]$ zwei verschiedene Punkte aus L, so dass $x\in\langle p,q\rangle$ gilt. Falls $b=0$, aber $a\neq 0$ gilt, wählen wir die Punkte $p=[0,1,0,\dots,0]$ und $q=[a,a^{-1}|x'|^2,x_1,\dots,x_{k-1}]$. Gilt $a=b=0$, wählen wir die Punkte $p=[-|x'|^2,-1,x_1,\dots,x_{k-1}]$ und $q=[|x'|^2,1,x_1,\dots,x_{k-1}]$. Auch im letzten Fall sind p und q verschieden, weil mindestens eine Koordinate von x von 0 verschieden sein muss und wir vorausgesetzt haben, dass in $\mathbb{K}$ immer $-1\neq 1$ gilt. □

3.3.2. Der nicht-desarguessche Fall. In diesem Fall ist der Index $i=2$, da Räume höherer Dimension nach [**Be**, Satz 2.7.1] immer desarguessch sind. Für diesen Abschnitt setzen wir voraus, dass die Charakteristik von $\mathbb{K}$ nicht zwei ist.
Wir müssen uns mit dem Problem beschäftigen, dass $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist und dementsprechend keine Ebene $P_2\mathbb{F}$ in homogenen Koordinaten existiert, auf die wir $[x]^v=[\bar{x}^Tx]$ anwenden könnten. Alle dafür notwendigen Überlegungen finden sich in [**Sa**]. Dort wird zwar von $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ausgegangen, aber an keiner für diese Arbeit wichtigen Stelle wird eine besondere Eigenschaft der reellen Zahlen verwendet. Daher referieren wir hier nur knapp die in [**Sa**] ausführlicher ausgeführten Beweise.

Wir betrachten die affine Ebene $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ über $\mathbb{F}$, wie in Definition 2.2.30 definiert. Diese hat einen projektiven Abschluss $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$. Dieser entsteht durch hinzufügen der Parallelklassen der Form

$(s) = \{[s,t] \mid t \in \mathbb{F}\}$ und $(\infty) = \{[c] \mid c \in \mathbb{F}\}$. Diese alle zusammen liegen auf der unendlich fernen Geraden $[\infty]$. Da $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, können wir $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ nicht mit homogenen Koordinaten beschreiben. Daher verwenden wir auch das Symbol $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ statt $P_2\mathbb{F}$. Wir wollen diese projektive Ebene auf andere Weise beschreiben:

Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{F}^3 \times \mathbb{K}^3 \cong \mathbb{K}^{3k}$ und darin die Teilmenge

$$X := \left\{(f_1, f_2, f_3; r_1, r_2, r_3) \in V \mid \forall(\lambda,\mu,\nu) \in C(\{1,2,3\}) : r_\lambda \overline{f_\lambda} = f_\mu f_\nu, f_\lambda \overline{f_\lambda} = r_\mu r_\nu\right\}$$

Dabei bezeichne $C(\{1,2,3\})$ die Menge der zyklischen Permutationen von $\{1,2,3\}$. Offensichtlich ist mit $x \in X$ auch $\mathbb{K}x \subset X$. Wir wollen nun eine zu $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ isomorphe Geometrie mit Punktmenge $V_{\mathbb{F}} = \{\mathbb{K}x \mid x \in X \backslash \{0\}\} \subseteq P_{3k-1}\mathbb{K}$ definieren. Um die Blöcke dieser Geometrie zu definieren, definieren wir die folgende Bilinearform β auf V:

$$((f_1, f_2, f_3; r_1, r_2, r_3)|(g_1, g_2, g_3; s_1, s_2, s_3))^\beta := \sum_{\nu=1}^{3} \overline{f_\nu} g_\nu + \overline{g_\nu} f_\nu + r_\nu s_\nu.$$

Zu β gehört die quadratische Form:

$$\frac{1}{2}((f_1, f_2, f_3; r_1, r_2, r_3)|(g_1, g_2, g_3; s_1, s_2, s_3))^\beta = \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu \overline{f_\nu} + \frac{1}{2} r_\nu^2.$$

Die Blöcke von $V_{\mathbb{F}}$ sind die Orthogonalräume zu Punkten aus X bezüglich der Bilinearform β, geschnitten mit $V_{\mathbb{F}}$. Die Menge der Blöcke ist also $\mathcal{L} := \left\{p^\perp \cap V_{\mathbb{F}} \mid p \in V_{\mathbb{F}}\right\}$. Wir definieren einen Punkt $p \in V_{\mathbb{F}}$ als inzident mit einen Block $q^\perp$ genau dann, wenn $p \in q^\perp$ gilt.

3.3.14. Lemma. *Sei $W = (0,0,0;0,0,1)^\perp$. Dann ist*

$$L := W \cap V_{\mathbb{F}} = \left\{\mathbb{K}(0,0,f;\overline{f}f,1,0) \mid f \in \mathbb{F}\right\} \cup \{\mathbb{K}(0,0,0;1,0,0)\}$$

eine Quadrik im $k-$dimensionalen projektiven Teilraum $\langle L\rangle = \{\mathbb{K}(0,0,f;r_1,r_2,0) \mid f \in \mathbb{F}; r_1, r_2 \in \mathbb{K}\}$ von $P_{3k-1}\mathbb{K}$ mit quadratischer Form $(0,0,f;r_1,r_2,0)^q = \overline{f}f - r_1 r_2$.

Beweis: Nach Definition ist ein Punkt $(f_1, f_2, f_3; r_1, r_2, r_3)$ genau dann in W enthalten, wenn $r_3 = 0$ gilt. Der einzige Punkt in X mit $r_3 = 0$ und $r_2 = 0$ ist $(0,0,0;1,0,0)$. Ist $r_2 \neq 0$, kann für die Darstellung in homogenen Koordinaten $r_2 = 1$ angenommen werden und die Definition von X erzwingt $f_1 = 0 = f_2$ und $r_1 = f_3\overline{f_3}$. Dies ist eine Quadrik, weil der $\mathbb{F}-$Antiautomorphismus $f \mapsto \overline{f}$ über seinem Fixkörper $\mathbb{K}$ linear ist. □

3.3.15. Lemma. *$V_{\mathbb{F}}$ ist eine zu $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ isomorphe projektive Ebene.*

Beweis: Wir definieren einen Isomorphismus $v : \overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}} \to V_{\mathbb{F}}$ durch:

$$\begin{aligned}(f,g) &\mapsto \mathbb{K}(f, \overline{g}, g\overline{f}; g\overline{g}, f\overline{f}, 1),\\ (s) &\mapsto \mathbb{K}(0,0,s; s\overline{s}, 1, 0),\\ (\infty) &\mapsto \mathbb{K}(0,0,0;1,0,0),\end{aligned}$$

und für Geraden:

$$[s,t] \mapsto (\overline{s}t, -\overline{t}, -s; 1, s\overline{s}, t\overline{t})^{\perp},$$
$$[c] \mapsto (-c, 0, 0; 0, 1, c\overline{c})^{\perp},$$
$$[\infty] \mapsto (0,0,0;0,0,1)^{\perp},$$

für $f, g, s, t, c \in \mathbb{F}$.
Es ist leicht zu sehen, dass diese Abbildung wohldefiniert und bijektiv ist. Wir zeigen hier noch die Inzidenzerhaltung:
Dass Punkte aus $[\infty]$ auf Punkte auf $(0,0,0;0,0,1)^{\perp}$ abgebildet werden, ist klar, weil genau die Punkte (s) mit $s \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ auf einen Punkt mit letzter Koordinate gleich 0 abgebildet werden.
Das Bild der Geraden $[c]$ enthält das Bild eines Punktes (f,g) genau dann, wenn die Gleichung $0 = ((f, \overline{g}, g\overline{f}; g\overline{g}, f\overline{f}, 1)|(-c,0,0;0,1,c\overline{c}))^{\beta} = -\overline{f}c - \overline{c}f + f\overline{f} + c\overline{c} = (\overline{f} - \overline{c})(f - c)$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f = c$ gilt, also (f,g) auf $[c]$ liegt. Das Bild von $[c]$ enthält außerdem das Bild von (∞) aber nicht das Bild von (s) mit $s \in \mathbb{F}$.
Alle übrigen Rechnungen verlaufen sehr ähnlich, für Details siehe [**Sa**, S. 79f, Unterabschnitt 16.3]. □

Die Abbildung v nennen wir Veroneseabbildung. Im desarguesschen Fall stimmt sie bis auf Äquivalens mit der im vorherigen Unterabschnitt konstruierten Veroneseabbildung überein. Die nachfolgenden Überlegungen stammen nicht aus [**Sa**]. Sie zielen auch weniger auf Aussagen über $V_{\mathbb{F}}$ von allgemeinem Interesse, sondern auf einige, sehr konkrete Eigenschaften, die wir später in dieser Arbeit verwenden wollen.

3.3.16. Lemma. *Die Gruppe der Isomorphismen von $V_{\mathbb{F}}$, die sich zu linearen Kollineationen von $P_{3k-1}\mathbb{K}$ fortsetzen lassen, ist transitiv auf nicht ausgearteten Dreiecken.*

Beweis: Da $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ nach dem Bruck-Kleinfeld Theorem [**BK**] eine Moufangebene ist, reicht es zu zeigen, dass sich Translationen zu Kollineationen fortsetzen lassen:
Die von der Translation $(f,g) \mapsto (f+s, g+t)$ von $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ auf $V_{\mathbb{F}}$ induzierte Abbildung, lässt sich auf V zu der Abbildung: $(f_1, f_2, f_3; r_1, r_2, r_3) \mapsto$
$(f_1 + r_3 s, f_2 + r_3\overline{t}, f_3 + \overline{f_2}\overline{s} + t\overline{f_1} + r_3 t\overline{s}; r_1 + \overline{f_2}\overline{t} + t f_2 + r_3 t\overline{t}, r_2 + \overline{f_1}\overline{s} + s f_1 + r_3 s\overline{s}, r_3)$ fortsetzen. Diese Abbildung ist $\mathbb{K}-$linear, denn Konjugation und Multiplikation sind $\mathbb{K}-$linear.
Es bleibt zu zeigen, dass sich auch die Translation fortsetzen lassen, die nicht $[\infty]^v$ als Achse haben. Dazu zeigen wir, dass ein fortsetzbarer Automorphismus von $V_{\mathbb{F}}$ existiert, der $[\infty]^v$ auf einen anderen Block abbildet. Ein solcher Automorphismus ist die Trialität, die als Einschränkung der Kollineation $[f_1, f_2, f_3; r_1, r_2, r_3] \mapsto [f_2, f_3, f_1; r_2, r_3, r_1]$ definiert ist. □

3.3.17. Korollar. *Die Blöcke von $V_{\mathbb{F}}$ sind paarweise zueinander linear äquivalent.*

Beweis: Nach Lemma 3.3.16 gibt es zu je zwei Blöcken einen Automorphismus, der einen auf den anderen abbildet, und sich zu einer Äquivalenz fortsetzen lässt. □

3.3.18. Korollar. *Die Blöcke von $V_{\mathbb{F}}$ sind Ovoide.*

Beweis: Nach Lemma 3.3.16 reicht es zu zeigen, dass der Block

$$L := (0,0,0;0,0,1)^{\perp} \cap V_{\mathbb{F}} = \left\{\mathbb{K}(0,0,f;\overline{f}f,1,0) \mid f \in \mathbb{F}\right\} \cup \{\mathbb{K}(0,0,0;1,0,0)\}$$

ein Ovoid ist. Weil L nach Lemma 3.3.14 eine Quadrik ist, bleibt nach Lemma 2.2.28 nur noch zu zeigen, dass L keine Gerade enthält:
Nach Lemma 3.3.14 gilt: $\langle L\rangle = \{\mathbb{K}(0,0,f;r_1,r_2,0) \mid f \in \mathbb{F}; r_1, r_2 \in \mathbb{K}\}$. Also können wir jeden Punkt in $\langle L\rangle$ mit homogenen Koordinaten $[f;r_1,r_2]$ mit $f \in \mathbb{F}; r_1, r_2 \in \mathbb{K}$ beschreiben. Dabei gilt $[f;r_1,r_2] \in L \Leftrightarrow f\bar{f} = r_1 r_2$.
Der Beweis verläuft dann genauso wie in Lemma 3.3.7:
Sei g eine Gerade in $\langle L\rangle$, die die zwei verschiedenen Punkte $y = [f;r_1,r_2]$ und $[0;1,0]$ aus L enthält. Dann enthält g auch den Punkt $z = [f;r_1+1,r_2]$. Wir nehmen an, z sei aus L. Dann gilt $f\bar{f} = (r_1+1)r_2 = f\bar{f} + r_2$ und somit $r_2 = 0$. Wegen $r_2 = f\bar{f}$ bedeutet das, dass $f = 0$ gilt, und somit ist $y = [0,1,0]$, ein Widerspruch. Somit kann g nicht in L enthalten sein, hat also höchstens zwei Schnittpunkte mit L.
Sei h eine Gerade in $\langle L\rangle$, die zwei beliebige Punkte x' und y' aus L enthält. Nach Lemma 3.3.16 gibt es eine Kollineation die x' auf $[0;1,0]$ und y' auf einen anderen Punkt $y \in L$ abbildet. Daher kann auch h nur zwei Punkte aus L enthalten. □

3.3.19. Lemma. *$V_{\mathbb{F}}$ ist ein $(3k-1,k)-$Cap.*

Beweis: Wir wissen schon, dass $V_{\mathbb{F}}$ eine $(n,k)-$Ovoidebene ist. Daher müssen wir nur noch zeigen, dass sich die Aufspanne zweier Blöcke in nur einem Punkt schneiden, denn nach Satz 3.4.4 ist eine $(n,k)-$Ovoidebene, die C2 erfüllt ein $(n,k)-$Cap.
Nach Lemma 3.3.16 reicht es zu zeigen, dass sich
$\xi_2 := \langle (0,0,0;0,1,0)^{\perp} \cap X\rangle = \{(0,f_2,0;r_1,0,r_3) \mid f_2 \in \mathbb{F}, r_1, r_2 \in \mathbb{K}\}$ und
$\xi_3 := \langle (0,0,0;0,0,1)^{\perp} \cap X\rangle = \{(0,0,f_3;r_1,r_2,0) \mid f_3 \in \mathbb{F}, r_1.r_2 \in \mathbb{K}\}$ nur im Punkt $(0,0,0;1,0,0)$ schneiden.
Sei dazu $x = (f_1,f_2,f_3,r_1,r_2,r_3) \in \xi_1 \cap \xi_2$. Das ist gleichbedeutend mit $r_2 = 0 = r_3$ und $f_1 = f_2 = f_3 = 0$. Das ist aber genau für den Punkt $(0,0,0;1,0,0)$ der Fall. □

Das folgende Lemma spielt in den Beweisen diese Arbeit keine Rolle. Es zeigt jedoch eine interessante Eigenschaft der Veronesemannigfaltigkeit auf und erklärt, warum in dieser Arbeit eine bestimmte Zentralprojektion eine so große Rolle spielt.

3.3.20. Lemma. *Die Umkehrbabbildung von $v|_{\mathcal{A}_2(\mathbb{F})}$ kann als Zentralprojektion aufgefasst werden.*

Beweis: Wir betrachten $V_{\mathbb{F}}$ als Bild von $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ unter dem im Beweis von Lemma 3.3.15 definierten Isomorphismus $v : \overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}} \to V_{\mathbb{F}}$, der auf $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ die Wirkung $(f,g)^v = \mathbb{K}(f,\overline{g},g\overline{f};g\overline{g},f\overline{f},1)$ hat.
Wie in Lemma 3.3.14 definieren wir
$L := (0,0,0;0,0,1)^{\perp} \cap V_{\mathbb{F}} = \left\{\mathbb{K}(0,0,f;\overline{f}f,1,0) \mid f \in \mathbb{F}\right\} \cup \{\mathbb{K}(0,0,0;1,0,0)\}$. Wir betrachten nun die Zentralprojektion ρ mit Zentrum $\langle L\rangle$ auf den $(2k-2)-$Raum
$U := \langle \mathbb{F}\times\mathbb{F}\times\{0\}\times\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{K}\rangle$. Dann können wir $V_{\mathbb{F}}^{\rho}$ vermöge der Abbildung $[f,g,0;0,0;k] \mapsto$

$k^{-1}(f, \overline{g})$ mit $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ identifizieren, weil Punkte mit letzter Koordinate 0 nicht im Bild von $V_{\mathbb{F}} \backslash L$ liegen. Bis auf diese Indentifikation gelten für alle $[f, g, 1] \in \mathcal{A}_2(\mathbb{F})$ die Gleichungen:

$$(f, g)^{v\rho} = (f, g)$$

und

$$[f, \overline{g}, g\overline{f}; g\overline{g}, f\overline{f}, 1]^{\rho v} = [f, \overline{g}, g\overline{f}; g\overline{g}, f\overline{f}, 1].$$

□

3.4. Ergebnisse dieser Arbeit

In diesem Abschnitt listen wir die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit auf.

3.4.1. Satz. *Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n, 9)-$Cap über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik. Wenn $(X, \mathcal{L})$ eine nicht-desarguessche projektive Ebene ist, dann ist $n = 26$ und $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ist äquivalent zur Veroneseeinbettung einer Oktavenebene über $\mathbb{K}$.*

Der Beweis dieses Satzes wird in Unterabschnitt 4.4.2 vollendet.

3.4.2. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik, der genau zwei Quadratklassen hat. Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein (n, k)-Cap vom Index 2 in $P_n\mathbb{K}$. Falls $(X, \mathcal{L})$ nicht-desarguessch ist, oder $k \in \{2, 3, 5, 9\}$ gilt, gelten $n = 3k + 1$, $k \leq 9$, und es gibt eine Veronesemannigfaltigkeit, die zu (X, Ξ) äquivalent ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird in Unterabschnitt 4.7.1 vollendet.

3.4.3. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik der genau zwei Quadratklassen hat. Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n, 5)-$Cap mit Index $i > 1$ in $P_n\mathbb{K}$. Dann ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ zu einer Veronesemannigfaltigkeit oder zu dem Bild einer Veronesemannigfaltigkeit unter einer Zentralprojektion äquivalent.*

Der Beweis dieses Satzes wird in Unterabschnitt 4.8.1 vollendet.

3.4.4. Satz. *Seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und $(X, \mathcal{L})$ eine Ovoidebene in $P_n\mathbb{K}$, so dass für alle Blöcke $L \neq M \in \mathcal{L}$ die Inklusion $\langle L \rangle \cap \langle M \rangle \subseteq X$ gilt. Dann ist das Tripel $(X, \Xi, \mathcal{L})$ mit $\Xi := \{\langle L \rangle \mid L \in \mathcal{L}\}$ ein $(n, k)-$Cap.*

Der Beweis dieses Satzes wird in Unterabschnitt 5.1.2 vollendet.

3.4.5. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und seien $1 < i, k, n \in \mathbb{N}$. Sei $(X, \mathcal{L})$ ein normaler $(n, k)-$Ovoidraum vom Index $i \geq 2$ im Sinne von Definition 5.3.1 in $P_n\mathbb{K}$. Dann ist das Tripel $(X, \Xi, \mathcal{L})$ mit $\Xi := \{\langle L \rangle \mid L \in \mathcal{L}\}$ ein $(n, k)-$Cap.*

Der Beweis dieses Satzes wird in Unterabschnitt 5.3.1 vollendet.

3.4.6. SATZ. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik größer als zwei und mindestens vier Elementen, dann ist eine Teilmenge $V \subseteq P_5\mathbb{K}$ genau dann Punktmenge einer $(5,2)-$Ovoidebene, wenn die folgenden Axiome gelten:*
(V1): Sei H eine Hyperebene, so dass $H \cap V$ ein Oval und zwei verschiedene, nicht in dem Oval enthaltene Punkte enthält. Dann ist $H \cap V$ die Vereinigung von zwei sich in genau einem Punkt schneidenden Ovalen.
(V2): Sei E ein $2-$Raum mit $|E \cap V| \geq 4$, dann enthält $E \cap V$ ein Oval.
(V3): V enthält mindestens zwei verschiedene Ovale, deren Vereinigung nicht ganz V ist.
Damit ist V nach **[SM1]** *auch Punktmenge eines $(5,2)-$Caps, das zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist.*
Der Beweis dieses Satzes wird in Unterabschnitt 6.1.1 vollendet.

3.4.7. SATZ. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik größer als zwei, dann ist eine Teilmenge $V \subseteq P_8\mathbb{K}$ genau dann Punktmenge einer $(8,3)-$Ovoidebene, wenn die folgenden Axiome gelten:*
(H1): Sei S ein $3-$Raum. Wenn $S \cap V$ zwei verschiedene Ovale enthält, dann ist $S \cap V$ ein Ovoid.
(H2): Wenn eine Hyperebene zwei Punkte aus V enthält, enthält sie auch ein Oval aus V, das beide Punkte enthält.
(H3): Sei H eine Hyperebene. Wenn $H \cap V$ zwei verschiedene zweidimensionale Ovoide enthält, besteht $H \cap V$ aus zweidimensionalen Ovoiden, die sich alle in genau einem Punkt schneiden.
(H4): $\langle V \rangle = P_8$.
Damit ist V nach **[SM2]** *auch Punktmenge eines $(8,3)-$Caps, das zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist.*
Der Beweis dieses Satzes wird in Unterabschnitt 6.2.1 vollendet.

KAPITEL 4

Charakterisierung von Veronesemannigfaltigkeiten als $(n, k)-$Caps

4.1. Ziel und Ausgangslage

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}$ ein Schiefkörper. Wir wollen zeigen, dass zu jedem (n, k)-Cap (X, Ξ) mit Index 2 in $P_n\mathbb{K}$ eine Veronesemannigfaltigkeit $\mathcal{V}$ existiert, so dass (X, Ξ) und $\mathcal{V}$ äquivalent zueinander sind, also dass eine Kollineation des $P_n\mathbb{K}$ auf sich selbst existiert, die (X, Ξ) auf $\mathcal{V}$ abbildet. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir einen Zusammhang zwischen der Geometrie des $(n, k)-$Caps als projektive Ebene und der des umgebenden Raumes $P_n\mathbb{K}$ herstellen. Ein wichtiges Bindeglied dabei werden Unterebenen von $(X, \mathcal{L})$ sein, deren Geraden als Punktmengen $2-$Raumschnitte von Blöcken haben. Diese Unterebenen, die wir in Definition 4.3.8 generische Untercaps nennen wollen, sind also in beiden geometrischen Strukturen $(X, \mathcal{L})$ und $P_n\mathbb{K}$ beschrieben und können daher beide verbinden.
Mit dem Fortsetzungssatz (Satz 4.4.5) zeigen wir dann, dass Isomorphismen zwischen (n, k)-Caps, die generische Untercaps auf generische Untercaps abbilden, zu Äquivalenzen fortsetzbar sind. Im nicht-desarguesschen Fall führt uns das direkt zu einer Äquivalenz zwischen (X, Ξ) und einer geeigneten Veronesemannigfaltigkeit, im desarguesschen Fall ist die Lage komplizierter.
In diesem Fall zeigen wir, dass zwei (n, k)-Caps äquivalent sind, wenn ihre Blöcke äquivalent sind.
Um diese Erkenntnis zu nutzen, zeigen wir, dass die Blöcke unseres (n, k)-Caps zueinander äquivalente Quadriken sind und bestimmen ihre Gleichung. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen hat, können wir dann eine Divisionsalgebra $\mathbb{F}$ über $\mathbb{K}$ konstruieren, so dass die Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{F}}$ Blöcke hat, die zu den Blöcken unseres (n, k)-Caps äquivalent sind. Die den Beweis vollendet.

4.1.1. Der Körper $\mathbb{K}$. Sei $\mathbb{K}$ ein Schieförper mit mindestens 4 Elementen und $P_n\mathbb{K}$ der n-dimensionale desarguessche projektive Raum über $\mathbb{K}$. Die Forderung $|\mathbb{K}| > 3$ benötigen wir, da wir in Lemma 4.3.3 verwenden wollen, dass auf jeder Geraden von $P_n\mathbb{K}$ mindestens 5 Punkte liegen. Wir setzen hier noch nicht voraus, dass $\mathbb{K}$ kommutativ ist, werden dies aber in Bemerkung 4.3.9 zeigen.
In den Abschnitten 4.5, 4.6 und 4.7 berechnen wir die Gleichungen der Blöcke, nachdem wir gezeigt haben, dass es sich um Quadriken handelt. Dabei benötigen wir einen Grundkörper $\mathbb{K}$ mit Charakteristik ungleich 2.

4.1.2. Einige Bezeichnungen. Seien für dieses Kapitel $n, k \in \mathbb{N}$ und (X, Ξ) ein (n, k)-Cap. Sei ferner $\mathcal{L} = \{\xi \cap X \mid \xi \in \Xi\}$ die Menge der Blöcke von (X, Ξ). Zu zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ gibt es somit den eindeutig bestimmten Block $L(x_1, x_2) := \xi(x_1, x_2) \cap X$. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_x$ das Büschel von x, also die Menge aller Blöcke, die x enthalten. Wie wir in Proposition 4.2.2 sehen werden, ist $(X, \mathcal{L})$ ein projektiver Raum. Somit besteht die Aufgabe, stets sorgfältig zwischen der projektiven Struktur von $(X, \mathcal{L})$ und der von $P_n\mathbb{K}$ zu unterscheiden. Die Begriffe Gerade, Unterraum und Dimension meinen wir immer in Bezug auf $P_n\mathbb{K}$. Die spitzen Klammern $\langle\rangle$ bezeichnen grundsätzlich nur den Aufspann in $P_n\mathbb{K}$.
Wenn wir von Unterebenen von $(X, \mathcal{L})$ sprechen, meinen wir Unterebenen im Sinne von Definition 2.2.8. Wenn wir von Unterräumen $P_n\mathbb{K}$ sprechen, meinen wir Unterräume im Sinne von Definition 2.2.6. Nur solche bezeichnen wir als $d-$Raum, wenn sie Dimension d haben. Unterebenen des umgebenden Raumes $P_n\mathbb{K}$ im Sinne von Definition 2.2.8 kommen in dieser Arbeit nicht vor.

4.2. Fakten über (n, k)-Caps

In diesem Abschnitt beweisen wir ein paar grundlegende Tatsachen über (n, k)-Caps. Sämtliche Lemmata dieses Abschnittes werden in ähnlicher Form von J. Schillewaert und H. Van Maldeghem in **[SM2]** für den Fall $k = 3$ bewiesen. Wir passen die Beweise nur der Situation mit unbekanntem k an und formulieren sie so, dass sie gut zu den in dieser Arbeit vorgesehenen Anwendungen passen.

4.2.1. LEMMA. *Seien L_1, L_2, L_3 drei sich paarweise in den paarweise verschiedenen Punkten $L_1 \cap L_2 =: x_{12}, L_1 \cap L_3 =: x_{13}, L_2 \cap L_3 =: x_{23}$ schneidende Blöcke. Sei L_4 ein Block, der L_1 und L_2 in zwei verschiedenen Punkten $x_{14} := L_1 \cap L_4$, bzw. $x_{24} := L_2 \cap L_4$ schneidet. Dann ist $L_4 \subseteq V := \langle L_1, L_2, L_3\rangle$, und falls $L_4 \neq L_3$ ist, gilt $\langle L_1, L_2, L_3\rangle = \langle L_2, L_3, L_4\rangle$.*

Beweis: Die $(k-1)-$Räume $T_{x_{13}}(L_3)$ und $T_{x_{13}}(L_1)$ sind in V enthalten. Weil L_3, L_1 und $L_5 := L(x_{13}, x_{24})$ den Block L_2 schneiden, gilt nach (C3) die Inklusion

$$T_{x_{13}}(L_5) \subseteq T(x_{13}, L_2) = \langle T_{x_{13}}(L_1), T_{x_{13}}(L_3)\rangle \subseteq \langle L_1, L_3\rangle \subseteq V.$$

Damit ist auch $\langle L_5\rangle = \langle T_{x_{13}}(L_5), x_{24}\rangle$ in V enthalten, also ist auch $T_{x_{24}}(L_5) \subseteq \langle L_5\rangle \subseteq V$. Da auch $T_{x_{24}}(L_2)$ in V enthalten ist und L_2, L_4, L_5 den Block L_1 schneiden, ist nach (C3) auch $T_{x_{24}}(L_4) \subseteq V$. Daher ist $\langle L_4\rangle = \langle T_{x_{24}}(L_4), x_{14}\rangle \subseteq V$, und damit ist $\langle L_1, L_2, L_3\rangle \supseteq \langle L_2, L_3, L_4\rangle$ gezeigt.

Umgekehrt lässt sich das bisher gezeigte nicht direkt anwenden, weil kein Schnittpunkt von L_3 und L_4 gegeben ist. Weil L_2, L_4 und L_5 den Block L_1 jeweils in einem Punkt schneiden, gilt aber mit (C3): $T_{x_{24}}(L_5) \subseteq T(x_{24}, \langle L_1\rangle) = \langle T_{x_{24}}(L_2), T_{x_{24}}(L_4)\rangle \subseteq \langle L_2, L_4\rangle$. Wegen $L_5 \subseteq \langle T_{x_{24}}(L_5), x_{13}\rangle$ ist damit $\langle L_2, L_3, L_5\rangle \subseteq \langle L_2, L_3, L_4\rangle$ gezeigt. Wegen $L_4 \neq L_3$ schneiden sich L_2, L_3 und L_5 in paarweise verschiedenen Punkten. Da L_1 die Blöcke L_2 und L_3 schneidet, ist nach dem bereits gezeigten ersten Teil dieses Lemmas $\langle L_1, L_2, L_3\rangle \subseteq \langle L_2, L_3, L_5\rangle$. Daher gilt $\langle L_1, L_2, L_3\rangle \subseteq \langle L_2, L_3, L_4\rangle$. □

4.2.2. Proposition. *Die Geometrie $(X,\mathcal{L})$ ist ein projektiver Raum.*

Beweis: Mit (C1) ist bereits klar, dass je zwei Punkte auf genau einem Block liegen. Es bleibt noch das Axiom von Veblen und Young zu zeigen. Seien dazu $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ zwei Blöcke die sich in genau einem Punkt x_{12} schneiden. Sei $L_3 \in \mathcal{L}$ so, dass die Schnittpunkte $x_{13} := L_1 \cap L_3$ und $x_{23} := L_2 \cap L_3$ existieren und von x_{12} verschieden sind. Wir zeigen noch, dass jeder Block $L_4 \in \mathcal{L}\backslash\{L_1, L_2, L_3\}$, der L_1 und L_2 in verschiedenen Punkten x_{14} und x_{24} schneidet, auch L_3 schneidet. Nach Lemma 4.2.1 sind L_4 und $L_5 := L(x_{13}, x_{24})$ in $V = \langle L_1, L_2, L_3\rangle$ enthalten. Offenbar gilt $2k \leq \dim V \leq 3k-1$. Nehmen wir nun an, es gelte $\dim V = 3k-d$ mit $1 \leq d \leq k$. Sei ρ eine Zentralprojektion mit Zentrum $\langle L_2\rangle$. Dann erzeugen die $(k-1)-$Räume $\langle L_4^\rho\rangle$ und $\langle L_3^\rho\rangle$ den $(2k-d-1)-$Raum V^ρ, weil nach Lemma 4.2.1 bereits $V = \langle L_2, L_3, L_4\rangle$ ist. Also schneiden sich $\langle L_4^\rho\rangle$ und $\langle L_3^\rho\rangle$ in einem Unterraum r der Dimension $d-1$. Seien $r_3 := T_{x_{23}}(L_3)^\rho$ und $r_4 := T_{x_{24}}(L_4)^\rho$. Wir unterscheiden vier verschiedene Fälle:

(1) $r \nsubseteq r_3$ *und* $r \nsubseteq r_4$. Weil die Schnitte $r \cap r_3$ und $r \cap r_4$ echte Unterräume von r sind, gibt es einen Punkt $y \in r$, der weder in r_3 noch in r_4 enthalten ist. Dann hat y nach Lemma 3.2.5 ein Urbild $x_3 \in L_3$ und ein Urbild $x_4 \in L_4$. Falls $x_3 \neq x_4$ gilt, hat der Raum $\langle x_3, x_4, L_2\rangle = \langle y, L_2\rangle$ Dimension $k+1$ und die Gerade $\langle x_3, x_4\rangle$ schneidet den k-Raum $\langle L_2\rangle$ in genau einem Punkt z, der von $x_3 \notin L_2$ und $x_4 \notin L_2$ verschieden sein muss. Nach (C2) ist dann $z \in \langle L_2\rangle \cap \langle L(x_3, x_4)\rangle \subseteq X$, also ist $z \in L(x_3, x_4)$, was nicht sein kann, weil $L(x_3, x_4)$ ein Ovoid ist und die Punkte z, x_3, x_4 auf einer Geraden liegen. Also schneiden sich L_3 und L_4 im Punkt $x_3 = x_4$.

(2) $r \subseteq r_4$ *und* $r \nsubseteq r_3$. Sei $x_3 \in r^{\rho^{-1}} \cap L_3$. Es gilt: $T_{x_{24}}(L_4) \subseteq \langle L_2, r_4\rangle$. Da $\langle L_2, r_4\rangle$ auch den Raum $T_{x_{24}}(L_2)$ enthält und die Blöcke L_2, L_4, L_5 den Block L_1 schneiden, ist nach (C3) auch $T_{x_{24}}(L_5) \subseteq \langle L_2, r_4\rangle$. Da die drei Blöcke L_2, L_5 und $L(x_3, x_{24})$ den Block L_3 schneiden, ist nach (C3) auch $T_{x_{24}}(L(x_3, x_{24})) \subseteq \langle T_{x_{24}}(L_2), T_{x_{24}}(L_5)\rangle \subseteq \langle L_2, r_4\rangle$. Also ist wegen $x_3 \in r^{\rho^{-1}} = \langle L_2, r\rangle \subseteq \langle L_2, r_4\rangle$ der Block $L(x_3, x_{24})$ ganz im $(2k-1)-$Raum $\langle L_2, r_4\rangle$ enthalten. Dann schneiden sich die k-Räume $\langle L_2\rangle$ und $\langle L(x_3, x_{24})\rangle$ in mindestens einer Geraden. Das ist ein Widerspruch zu Bemerkung 3.1.2(3).

(3) $r \subseteq r_3$ *und* $r \nsubseteq r_4$. Mit vertauschten Rollen von L_3 und L_4 besteht der gleiche Widerspruch wie im Fall $r \subseteq r_4$ und $r \nsubseteq r_3$.

(4) $r \subseteq r_3 \cap r_4$. Nach (C3) gilt $T_{x_{24}}(L_5) \subseteq \langle L_2, r_4\rangle$, weil $T_{x_{24}}(L_2)$ und $T_{x_{24}}(L_4)$ in $\langle L_2, r_4\rangle$ enthalten sind. Somit enthält der Raum $U = \langle L_2, r_3, r_4, x_{13}\rangle$ die Blöcke L_2, L_3 und L_5. Damit sind nach Lemma 4.2.1 die Räume V und U gleich. Es gilt aber
$\dim U \leq (k + \dim\langle r_3, r_4\rangle + 1) + 1 \leq k + 2 + (k-2+k-2-\dim r) = 3k-d-1$, ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\dim V = 3k-d$ sei.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. □

4.2.3. Lemma. *Der Aufspann V dreier sich paarweise in verschiedenen Punkten schneidender Blöcke L_1, L_2, L_3 hat Dimension $3k-1$.*

Beweis: Wir betrachten eine Zentralprojektion ρ von V mit Zentrum $\langle L_2\rangle$ auf einen geeigneten zu $\langle L_2\rangle$ disjunkten Unterraum U, der $\langle U, L_2\rangle = V$ erfüllt. Seien $x, y \in X\backslash L_2$. Dann ist ρ nach Lemma 3.2.5 auf $L(x,y)$ injektiv, und es gilt $x^\rho \neq y^\rho$, also ist $\rho|_X$ injektiv.
Sei $u \in \langle L_1^\rho\rangle \cap \langle L_3^\rho\rangle$. Nehmen wir an, es gelte $u \neq (L_1 \cap L_2)^\rho =: v$. Dann ist die Gerade $\langle u, v\rangle$

nach Lemma 3.2.5 bis auf einen Punkt in L_1^ρ und in L_3^ρ enthalten. Weil $\rho|_X$ injektiv ist, heißt das, es gibt mehr als einen Schnittpunkt von L_1 und L_3, ein Widerspruch.
Damit gilt $\langle L_1^\rho\rangle \cap \langle L_3^\rho\rangle = (L_1 \cap L_2)^\rho$, woraus die Gleichung

$$\dim V = \dim\langle L_2\rangle + \dim U + 1 \geq k + \dim\langle L_1^\rho, L_3^\rho\rangle + 1 = k + 2(k-1) + 1 = 3k - 1$$

folgt. Wegen
$\dim V =$
$= \dim\langle L_2\rangle + \dim\langle L_1, L_3\rangle - \dim(\langle L_1, L_3\rangle \cap \langle L_2\rangle)$
$\leq \dim\langle L_2\rangle + \dim\langle L_1, L_3\rangle - 1$
$= 3k - 1$
ist dieses Lemma damit bewiesen. □

4.2.4. Definition. Die Dimension des projektiven Raumes $(X, \mathcal{L})$ nennen wir auch den *Index des (n,k)-Caps.*

Wir wollen von nun an annehmen, unser $(n, k)-$Cap habe Index 2. Den Fall eines größeren Index werden wir in Abschnitt 4.8 behandeln.
Durch diese Annahme wissen wir insbesondere, dass sich je zwei Blöcke in einem Punkt schneiden und wir können n in Abhängigkeit von k eindeutig bestimmen.

4.2.5. Lemma. *Wenn das $(n, k)-$Cap (X, Ξ) Index 2 hat, gilt für alle $L_1 \in \mathcal{L}$ und $x \in X\backslash L_1$:*

(1) $P_n\mathbb{K} = \langle T(x), L_1\rangle$.
(2) *Seien $L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ zwei Blöcke die sich in x schneiden, dann gilt: $P_n\mathbb{K} = \langle L_1, L_2, L_3\rangle$.*
(3) $n = 3k - 1$.
(4) $\langle L_1\rangle \cap T(x) = \emptyset$.

Beweis: Sei $y \in X\backslash\{x\}$. Dann gilt $\langle L(x, y)\rangle = \langle T_x(L(x, y)), L(x, y) \cap L_1\rangle \subseteq \langle T(x), L_1\rangle$. Da y beliebig gewählt ist, ist mit y ganz X in $\langle T(x), L_1\rangle$ enthalten. Damit ist aber auch $P_n\mathbb{K} = \langle X\rangle \subseteq \langle T(x), L_1\rangle$. Nach Axiom (C3) gilt bereits $T(x) \subseteq \langle L_2, L_3\rangle$ und somit

$$P_n\mathbb{K} = \langle X\rangle = \langle T(x), L_1\rangle \subseteq \langle L_1, L_2, L_3\rangle.$$

Nach Lemma 4.2.3 ist damit $n = 3k - 1$ gezeigt. Da $T(x)$ nach (C3) Dimension $2k - 2$ hat, gilt $\dim(T(x) \cap \langle L_1\rangle) = 2k - 2 + k - (3k - 1) = -1$. Also gilt auch $\langle L_1\rangle \cap T(x) = \emptyset$. □

4.2.6. Lemma. *Seien $l \geq 2$ und $(V, \mathcal{L}')$ eine Unterebene von $(X, \mathcal{L})$, so dass $\Xi' := \{\langle L' \cap V\rangle \mid L' \in \mathcal{L}'\}$ eine Menge von $l-$Räumen ist. Dann ist das Paar (V, Ξ') ein $(3l - 1, l)-$Cap.*

Beweis: Für alle $R \in \Xi'$ ist $R \cap V$ nach Lemma 2.2.25 ein Ovoid. Die Axiome (C1) und (C2) übertragen sich direkt von (X, Ξ). Da (V, Ξ') eine $(n', l)-$Ovoidebene ist, besagt Satz 3.4.4, dass (V, Ξ') ein $(n', l)-$Cap ist. Nach Lemma 4.2.5(3) gilt damit auch $n' = 3l - 1$. □

4.3. Eine Projektion und ihre Folgen

In diesem Abschnitt sei wie gehabt (X, Ξ) ein $(n, k)-$Cap vom Index 2. Den Ideen von B.N. Cooperstein, J.A. Thas und H. Van Maldeghem in **[CTM]** folgend, wollen wir die geometrische Struktur von (X, Ξ) besser verstehen, indem wir ihr Bild unter einer Zentralprojektion betrachten. Dazu legen wir die folgenden Bezeichnungen fest: Sei L ein Block, sei U ein $(2k-2)-$dimensionaler Unterraum von $P_n\mathbb{K}$, der disjunkt zu $\langle L\rangle$ ist. Dann ist $\dim\langle U, L\rangle = (2k-2)+k+1 = n$, und es gilt $\langle U, L\rangle = P_n\mathbb{K}$. Sei $\rho : P_n\mathbb{K}\backslash\langle L\rangle \to U$ die Zentralprojektion mit Zentrum $\langle L\rangle$ auf U, d.h. $p^\rho := \langle L, p\rangle \cap U$.
Wir werden in Lemma 4.3.4 feststellen, dass $U\backslash X^\rho$ eine Hyperebene von U ist. Somit trägt die Menge X^ρ zwei affine Strukturen: Zum einen ist $X^\rho = U\backslash R$ mit der von $P_n\mathbb{K}$ induzierten Inzidenz Punktmenge eines affinen $(2k-2)-$Raumes, andererseits ist X^ρ mit der von $(X, \mathcal{L})$ durch ρ induzierten Struktur Punktmenge einer affinen Ebene. Es geht in diesem Abschnitt nun darum, beide Strukturen zu vergleichen. Die von $(X, \mathcal{L})$ induzierte Struktur macht aus $(X, \mathcal{L})^\rho$ eine Andre-Bose-Bruck-Ebene, von der wir in Lemma 4.3.6 zeigen werden, dass es sich um eine Moufangebene handelt. Diese hat dann Koordinaten in einer alternativen Divisionsalgebra $\mathbb{F}$ über $\mathbb{K}$. Damit ist $(X, \mathcal{L})$ als projektive Ebene isomorph zu $P_2\mathbb{F}$.

Ein tiefer liegender Grund für die besondere Bedeutung der Zentralprojektion ρ ist, dass sie wie in Lemma 3.3.20 im Abschnitt über die Veroneseeinbettung als Umkehrung einer Veroneseeinbettung aufgefasst werden kann. Diese Auffassung ist natürlich nur sinnvoll, wenn (X, Ξ) eine Veronesemannigfaltigkeit ist.

4.3.1. Lemma. *Die Einschränkung der Projektion ρ auf $X\backslash L$ ist injektiv.*

Beweis: Seien $x, y \in X\backslash L$. Dann ist ρ nach Lemma 3.2.5 auf $L(x, y)$ injektiv, und es gilt $x^\rho \neq y^\rho$. □

4.3.2. Lemma. *Jede Gerade in U enthält entweder keinen oder genau einen Punkt aus X^ρ oder ist bis auf einen Punkt in X^ρ enthalten.*

Beweis: Enthalte die Gerade g die zwei Punkte x^ρ und y^ρ. Dann liegen x^ρ und y^ρ nach Lemma 3.2.5 in dem affinen k-Raum $L(x, y)^\rho$. Damit liegen auch alle Punkte von g bis auf genau einen unendlich fernen Punkt in $L(x, y)^\rho$.
Nehmen wir an, dieser Fernpunkt p hätte ein Urbild $z \in X$. Dann gilt $z \notin L(x, y)$, und es gibt einen Block $M \in \mathcal{L}_z$, der den Punkt $L(x, y) \cap L$ nicht enthält. Dann schneiden sich $\langle L(x, y)^\rho\rangle$ und $\langle M^\rho\rangle$ mindestens in der Geraden $\langle p, (L(x, y) \cap M)^\rho\rangle$ und es gilt:

$$\dim\langle L(x, y), L, M\rangle = k + 1 + \dim\langle M^\rho, L(x, y)^\rho\rangle \leq k + 1 + 2(k-1) - 1 = 3k - 2,$$

ein Widerspruch zu Lemma 4.2.3. □

4.3.3. Lemma. *Seien $x, y, z \in X\backslash L$ drei nicht kollineare Punkte, und der von ihnen erzeugte $2-$Raum sei disjunkt zu $\langle L\rangle$. Dann ist $E := \langle x^\rho, y^\rho, z^\rho\rangle$ ein $2-$Raum und $E\backslash X^\rho$ ist eine Gerade.*

Beweis: Weil $\langle x, y, z\rangle$ das Zentrum von ρ, also den elliptischen Raum $\langle L\rangle$, nicht schneidet, ist E nach Lemma 3.2.3 ein $2-$Raum. Wenn x, y, z in einem gemeinsamen Block liegen, ist nach Lemma 3.2.5 klar, dass $E\backslash X^\rho$ eine Gerade ist.
Andernfalls müssen wir unter anderem zeigen, dass eine Gerade in E existiert, die keinen Punkt aus $A := E \cap X^\rho$ enthält. Nehmen wir zu diesem Zweck an, es existierte keine solche Gerade. Da nach Lemma 4.3.2 jede Gerade aus E mindestens einen Punkt des Komplementes von X^ρ enthält und sich nicht alle Geraden in einem Punkt schneiden, gibt es mindestens zwei Punkte in $E\backslash A$. Wir verbinden den Punkt $\langle x^\rho, y^\rho\rangle\backslash A$ mit einem anderen Punkt aus $E\backslash A$ zu einer Geraden g, welche A nach Lemma 4.3.2 in höchstens einem Punkt schneidet. Nach unserer Annahme enthält g damit genau einen Punkt a aus A. Wegen $g \cap \langle x^\rho, y^\rho\rangle \notin A$ gilt nach Konstruktion von g, dass a nicht in $\langle x^\rho, y^\rho\rangle$ liegen kann. Die Gerade $\langle a, x^\rho\rangle$ enthält genau einen Punkt $p \notin A$. Sei nun h eine Gerade durch p, die g in einem Punkt $q \neq a$ schneidet. Nach unserer Annahme enthält h genau einen Punkt $b \in A$.
Nach 4.1.1 liegt jeder Punkt auf mindestens fünf Geraden, also existiert eine Gerade i in E durch y^ρ die a, b, p und q nicht enthält. Damit enthält i mit y^ρ und $i \cap \langle a, x^\rho\rangle$ zwei Punkte aus A und mit $i \cap h$ und $i \cap g$ zwei Punkte aus $E\backslash A$, ein Widerspruch zu Lemma 4.3.2.
Das heißt, es gibt eine Gerade l in E, die keinen Punkt aus A enthält.

Als nächstes zeigen wir, dass es keine Gerade in E geben kann, die genau einen Punkt aus A enthält. Dazu betrachten wir die Geraden $h_1 = \langle x^\rho, y^\rho\rangle$, $h_2 = \langle x^\rho, z^\rho\rangle$, $h_3 = \langle y^\rho, z^\rho\rangle$ und eine vierte Gerade h_4, die h_1, h_2, h_3 in paarweise verschiedenen Punkten aus A schneidet. Jede dieser vier Geraden ist bis auf ihren Schnittpunkt mit l ganz in A enthalten. Eine Gerade h aus E, die genau einen Punkt aus X^ρ enthält, schneidet diese vier Geraden in mindestens drei verschiedenen Punkten, weil die Schnittpunkte $h_i \cap h_j$ in A liegen. Wenn zwei davon in $E\backslash A$ liegen, ist h gleich l. Daher kann es keine Gerade geben, die genau einen Punkt aus A enthält.
Nach Lemma 4.3.2 ist damit gezeigt, dass jede von l verschiedene Gerade bis auf ihren Schnittpunkt mit l in A enthalten ist, insbesondere ist damit $E\backslash X^\rho = l$ eine Gerade. □

Lemma 4.3.3 besagt, dass je drei nicht kollineare Punkte in X^ρ in einem affinen $2-$Raum liegen. Damit erschließen wir:

4.3.4. Lemma. *Der Raum U ist disjunkte Vereinigung von X^ρ und einer Hyperebene $R := U\backslash X^\rho$ von U, und es gilt: $R = \bigcup_{p\in L} T(p)^\rho$.*

Beweis: Seien $x_0, \dots, x_m \in X$, so dass $U_m := \langle x_0^\rho, \dots, x_m^\rho\rangle$ ein $m-$Raum ist. Wir zeigen, dass U_m die disjunkte Vereinigung von $X^\rho \cap U_m$ und einer Hyperebene $R_m \subseteq \bigcup_{M\in\mathcal{L}} T_{M\cap L}(M)^\rho$ von U_m ist. Wegen $\langle X^\rho\rangle = U$ und $\dim U < \infty$ ist dieses Lemma damit bewiesen.
Wir verwenden vollständige Induktion nach m:
Für $m = 2$ ist $U_2 := \langle x_0^\rho, x_1^\rho, x_2^\rho\rangle$ nach Lemma 4.3.3 die disjunkte Vereinigung von $U_2 \cap X^\rho$ und einer Geraden R_2. Jeder Punkt $r \in R_2$ liegt auf einer Geraden, die zwei verschiedene Punkte $y_1^\rho, y_2^\rho \in X^\rho$ enthält. Damit ist r nach Lemma 3.2.5 in $T_{L(y_1,y_2)\cap L}(L(y_1, y_2))^\rho$ enthalten.
Sei nun $m > 2$. Wir definieren $U_{m-1} := \langle x_0^\rho, \dots, x_{m-1}^\rho\rangle$ und wählen einen beliebigen Punkt $a \in U_m\backslash(U_{m-1} \cup \{x_m^\rho\})$. Die Gerade $\langle a, x_m^\rho\rangle$ schneidet dann den $(m-1)-$Raum U_{m-1} in genau einem Punkt b. Nach Induktionsvoraussetzung liegt b auf einer Geraden, die zwei Punkte

u_1, u_2 aus X^ρ enthält. Nach Lemma 4.3.3 ist $\langle u_1, u_2, x_m^\rho\rangle \cap X^\rho$ ein affiner 2-Raum. Somit liegt auch a auf einer Geraden, die zwei Punkte y_1^ρ, y_2^ρ aus X^ρ enthält. Damit ist a in $\langle L(y_1, y_2)^\rho\rangle$ enthalten und somit nach Lemma 3.2.5 entweder das Bild eines Punktes aus X oder eines Punktes aus $T_{L(y_1,y_2)\cap L}(L(y_1, y_2))$.
Wir zeigen jetzt noch, dass $R_m = U_m \backslash X^\rho$ eine Hyperebene ist. Dazu zeigen wir zuerst, dass für zwei verschiedene Punkte $r_1, r_2 \in R_m$ die Gerade $\langle r_1, r_2\rangle$ ebenfalls in R_m enthalten ist, also dass R_m ein Unterraum von U_m ist.
Es existiert ein Punkt $p_1 \in L$, so dass $r_1 \in T(p_1)^\rho$ gilt. Dabei gilt aus Dimensionsgründen für jeden Block $M \in \mathcal{L}_{p_1}$ die Gleichung $T_{p_1}(M)^\rho = \langle T_{p_1}(L), T_{p_1}(M)\rangle^\rho = T(p_1)^\rho$. Nehmen wir an, es existiert ein Punkt $x^\rho \in \langle r_1, r_2\rangle \cap X^\rho$. Dann ist $\langle r_1, r_2\rangle \subseteq \langle L(x, p_1)^\rho\rangle$ und kann nur einen Punkt aus R_m enthalten, ein Widerspruch. Somit gilt $\langle r_1, r_2\rangle \subseteq R_m$, und R_m ist damit ein Unterraum von $\langle x_0^\rho, \ldots, x_m^\rho\rangle$. Nehmen wir an R_m wäre keine Hyperebene. Weil $R_m = U_m$ wegen $x_0 \notin R_m$ unmöglich ist, ist R_m nach Induktionsvoraussetzung eine Hyperebene von U_{m-1}. Der 2-Raum $\langle x_0^\rho, x_1^\rho, x_m^\rho\rangle$ enthält nach Lemma 4.3.3 eine in R_m enthaltene Gerade, die aber nicht in der Gerade $\langle x_0^\rho, x_1^\rho, x_m^\rho\rangle \cap U_{m-1} \ni x_0^\rho, x_1^\rho$ enthalten sein kann, ein Widerspruch. Damit ist R_m eine Hyperebene in U_m und dieses Lemma ist bewiesen. □

4.3.5. Lemma. *Die Bilder der Tangentialräume an Punkte aus L bilden ein Spread von $R = U\backslash X^\rho$.*

Beweis: Nach Lemma 4.3.4 ist $R = \bigcup_{p\in L} T(p)^\rho$ gezeigt. Wir zeigen noch, dass die Bilder verschiedener Tangentialräume disjunkt sind.
Sei $p \in L$ und $M \in \mathcal{L}_p\backslash\{L\}$. Dann gilt $T(p)^\rho = \langle T_p(L), T_p(M)\rangle^\rho = T_p(M)^\rho$. Seien nun $q \in L\backslash\{p\}$ und $K \in \mathcal{L}_q\backslash\{L\}$. Nach Lemma 4.2.5(2) gilt dann $P_n\mathbb{K} = \langle K, L, M\rangle$ und somit $U = \langle K^\rho, M^\rho\rangle$. Weil $\langle K\rangle^\rho$ und $\langle M\rangle^\rho$ jeweils Dimension $k-1$ haben und U ein $(2k-2)-$Raum ist, gilt $\langle K\rangle^\rho \cap \langle M\rangle^\rho = (M \cap K)^\rho \notin R$. Also schneiden sich $T(p)^\rho = T_p(M)^\rho \subseteq \langle M\rangle^\rho$ und $T(q)^\rho = T_q(K)^\rho \subseteq \langle K\rangle^\rho$ nicht. Daher sind verschiedene Bilder von Tangentialräumen disjunkt und somit bilden die Bilder der Tangentialräume an Punkte aus L ein Spread von R. □

$(X\backslash L)^\rho$ ist mit der von $(X, \mathcal{L})$ via ρ übertragenen Struktur eine affine Ebene. Der projektive Abschluss von $(X\backslash L)^\rho$ ist eine Andre-Bose-Bruck-Ebene. Da $\overline{(X\backslash L)^\rho}$ vermöge ρ zu $(X, \mathcal{L})$ isomorph ist, können wir $\overline{(X\backslash L)^\rho}$ als Andre-Bose-Bruck-Darstellung von $(X, \mathcal{L})$ betrachten.

4.3.6. Lemma. *$(X, \mathcal{L})$ ist eine Moufangebene.*

Beweis: Nach Lemma 3.2.5 bildet ρ, die Projektion mit Zentrum $\langle L\rangle$, jeden Block K auf einen affinen $(k-1)-$Raum und $T_p(K)$ mit $p = K\cap L$ auf den unendlich fernen $(k-2)-$Raum l_p ab. Dabei ist l_p nur von p und nicht von K abhängig, denn wegen $T(p) = \langle T_p(K), T_p(L)\rangle \subseteq \langle l_p, L\rangle$ wird der ganze $(2k-2)$ dimensionale Raum $T(p)$ auf den $(k-2)-$Raum l_p abgebildet. Alle diese unendlich fernen $(k-2)-$Räume liegen im unendlich fernen $(2k-3)-$Raum R, also liegen alle Tangenten an Punkte aus L in der Hyperebene $\langle R, L\rangle$. Jetzt identifizieren wir alle Punkte aus $X\backslash L$ mit ihrem Bild unter ρ und die Punkte $p \in L$ mit $(T(p)\backslash\{p\})^\rho$, einem $(k-2)-$Raum in R. Auf diese Art erhalten wir eine Andre-Bose-Bruck-Darstellung von $(X, \mathcal{L})$. Somit ist $(X, \mathcal{L})$ eine Translationsebene mit Translationsgeraden L. Da L beliebig gewählt war, ist jede

Gerade Translationsgerade, womit $(X, \mathcal{L})$ nach Definition 2.3.7 eine Moufangebene ist. $\square$

4.3.7. LEMMA. *Je drei in $(X, \mathcal{L})$ nicht kollineare Punkte $x, y, z \in X$ liegen in einer zu $P_2\mathbb{K}$ isomorphen Unterebene von $(X, \mathcal{L})$.*

Beweis: Da L ein beliebiger Block ist, können wir $x, y, z \notin L$ annehmen. Nach Voraussetzung ist $E := \langle x^\rho, y^\rho, z^\rho \rangle$ ein $2-$Raum in U, der in keinem Bild eines Blockes enthalten ist und $R = U \backslash X^\rho$ in einer Geraden schneidet. Wir konstruieren eine Untergeometrie η von $(X, \mathcal{L})$. Als Punktmenge $\mathcal{P}$ wählen wir $(E \backslash R)^{\rho^{-1}} \cap X$ und die Punkte $p \in L$, bei denen $E \cap T(p)^\rho$ nicht leer ist. Als Geradenmenge $\mathcal{G}$ wählen wir alle Blöcke aus $\mathcal{L}$, die $\mathcal{P}$ in mindestens zwei Punkten schneiden. Dann ist die Geometrie $(\mathcal{P} \backslash L, \mathcal{G} \backslash \{L\})$ via ρ eine zu $E \backslash R$ isomorphe affine Ebene. Weil η der projektive Abschluss von $(\mathcal{P} \backslash L, \mathcal{G} \backslash \{L\})$ ist, ist η zum projektiven Abschluss E von $E \backslash R$ isomorph. Da E zu $P_2\mathbb{K}$ isomorph ist, ist η eine zu $P_2\mathbb{K}$ isomorphe Unterebene von $(X, \mathcal{L})$, die die drei Punkte x, y und z enthält. $\square$

4.3.8. DEFINITION. Sei η ein Untercap von $(X, \mathcal{L})$. Falls es ein $L \in \mathcal{L}$ und einen zu $\langle L \rangle$ disjunkten $(2k)-$Raum U gibt, so dass das Bild von η unter der Zentralprojektion von $P_n\mathbb{K}$ mit Zentrum $\langle L \rangle$ auf U ein $2-$Raum in U ist, der in keinem Bild eines Blockes enthalten ist und $R = U \backslash X^\rho$ in einer Gerade schneidet, nennen wir η ein *generisches Untercap.*

4.3.9. BEMERKUNG. *Generische Untercaps sind offensichtlich genau die wie im Beweis von 4.3.7 konstruierten Unterebenen. Damit sind generische Untercaps sowohl in $P_n\mathbb{K}$ als auch in $(X, \mathcal{L})$ beschreibbare geometrische Objekte. Sie sind daher sehr hilfreich, einen Zusammenhang zwischen den beiden Geometrien zu erkennen. Außerdem ermöglichen sie es die Ergebnisse aus* [**SM1**] *direkt anzuwenden, denn:*

(1) *Die Punktmengen der Blöcke generischer Untercaps sind genau die nicht-trivialen $2-$Raumschnitte von Blöcken.*
(2) *Nach Lemma 4.2.6 ist jedes generische Untercap ein $(5,2)-$Cap und damit nach* [**SM1**, Theorem 2.2] *zu einer quadratischen Veronesemannigfaltigkeit über $\mathbb{K}$ äquivalent und $\mathbb{K}$ ist kommutativ.*
(3) *Die Blöcke von generischen Untercaps sind Quadriken, woraus mit Lemma 2.4.1 folgt, dass auch die Blöcke von $(X, \mathcal{L})$ Quadriken sind.*

Wir wollen zunächst betrachten, wie viele generische Untercaps es gibt:

4.3.10. LEMMA. *Seien $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$, und seien $E_1 \subseteq \langle L_1 \rangle$ und $E_2 \subseteq \langle L_2 \rangle$ zwei $2-$Räume, so dass $C_1 := E_1 \cap L_1$ und $C_2 := E_2 \cap L_2$ zwei $L_1 \cap L_2$ enthaltende Ovale sind. Dann existiert genau ein generisches Untercap, das C_1 und C_2 enthält.*

Beweis: Sei $L \in \mathcal{L} \backslash \{L_1, L_2\}$ ein Block, der C_1 und C_2 in verschiedenen Punkten schneidet, und ρ eine Zentralprojektion mit Zentrum $\langle L \rangle$. Dann sind C_1^ρ und C_2^ρ Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, also einen $2-$Raum aufspannen. Das Urbild dieses $2-$Raumes ist wie

im Beweis von Lemma 4.3.7 ein generisches Untercap, das C_1 und C_2 enthält.
Die Punktmenge von η ist

$$\{M_1 \cap M_2 \mid M_1, M_2 \in \mathcal{L}, M_1 \neq M_2 : |M_1 \cap (C_1 \cup C_2)| = 2 = |M_2 \cap (C_1 \cup C_2)|\}.$$

Damit ist η eindeutig bestimmt. □

4.3.11. Korollar. *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Unterebene von $(X, \mathcal{L})$ so, dass für alle $L \in \mathcal{G}$ ein $2-$Raum $E \subseteq \langle L \rangle$ existiert, der $\mathcal{P} \cap L = E \cap L$ erfüllt. Dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ein generisches Untercap.*

Beweis: Seien $L_1, L_2 \in \mathcal{G}$ und $C_1 := L_1 \cap \mathcal{P}$ und $C_2 := L_2 \cap \mathcal{P}$. Sei η eine Unterebene von $(X, \mathcal{L})$ die C_1 und C_2 als Punktmengen von zwei Blöcken enthält. Solch eine Unterebene muss die Geradenmenge $\{L(x_1, x_2) \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2 \backslash \{x_1\}\}$ haben. Die Punktmenge muss aus den Schnittpunkten dieser Blöcke bestehen. Also sind C_1 und C_2 nur in einer einzigen Unterebene als Blöcke enthalten. Da C_1 und C_2 nach Lemma 4.3.10 in einem generischem Untercap enthalten sind, muss $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ dieses generische Untercap sein. □

4.3.12. Lemma. *Seien $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, und seien $E_1 \subseteq \langle L_1 \rangle$ und $E_2 \subseteq \langle L_2 \rangle$ zwei $2-$Räume, so dass $C_1 := E_1 \cap L_1$ und $C_2 := E_2 \cap L_2$ mindestens zwei Punkte enthalten. Dann sind C_1 und C_2 zueinander linear äquivalente Quadriken.*

Beweis: Falls $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ und $L_1 \neq L_2$ gelten, ist $C_1 \cap C_2 = L_1 \cap L_2$ und nach Lemma 4.3.10 sind C_1 und C_2 Blöcke in einem gemeinsamen generischem Untercap enthalten. Dieses ist zu einer quadratischen Veronesemannigfaltigkeit äquivalent, also sind C_1 und C_2 nach Korollar 3.3.5 zueinander linear äquivalente Quadriken.
Falls $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ und $L_1 = L_2$ gelten, dann sei $L_3 \in \mathcal{L} \backslash \{L_1, L_2\}$ ein Block, der genau einen Punkt aus $x \in C_1 \cap C_2$ enthält. Dann existiert ein x enthaltender $2-$Raum $E_3 \subseteq \langle L_3 \rangle$, so dass $C_3 := E_3 \cap L_3$ ein Oval ist. Dann sind nach Lemma 4.3.10 sowohl C_1 als auch C_2 jeweils Geraden in einer gemeinsamen quadratischen Veronesemannigfaltigkeit mit C_3, also linear äquivalent zu C_3. Daher sind C_1 und C_2 auch zueinander äquivalent.
Falls $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, wählen wir zwei Punkte $x_1 \in C_1$ und $x_2 \in C_2$. Dann sei E_3 ein $2-$Raum in $\langle L(x_1, x_2) \rangle$ der x_1 und x_2 enthält. Dann sind sowohl C_1 als auch C_2 zu $C_3 := E_3 \cap L(x_1, x_2)$, also auch zueinander linear äquivalent. □

4.3.13. Lemma. *Wenn $\mathbb{K}$ eine von zwei verschiedene Charakteristik hat, ist $(X, \mathcal{L})$ eine klassische projektive Ebene, das heißt es gilt $(X, \mathcal{L}) = P_2\mathbb{F}$, wobei $\mathbb{F}$ eine Divisionsalgebra ist, die entweder assoziativ oder eine Oktavenalgebra ist, die eine zu $\mathbb{K}$ isomorphe Unteralgebra hat.*

Beweis: Nach [**HP**, S. 154] ist jede Moufangebene eine klassische Ebene, also desarguessch oder isomorph zu $P_2\mathbb{F}$ mit einer alternativen Divisionsalgebra $\mathbb{F}$. Damit ist nach dem Bruck-Kleinfeld-Theorem [**BK**, Theorem A, corollary2] $\mathbb{F}$ assoziativ oder eine Oktavenalgebra über ihrem Zentrum $Z(\mathbb{F})$.
Nach Lemma 4.3.7 ist $\mathbb{K}$ damit eine Unteralgebra von $\mathbb{F}$. □

4.3.14. BEMERKUNG. *Wir haben nicht gezeigt, dass $\mathbb{K}$ das Zentrum von $\mathbb{F}$ ist. Im Fall $k = 3$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist dies auch falsch, denn das einzig in Frage kommende $\mathbb{F}$ sind die komplexen Zahlen, deren Zentrum nicht nur die reellen Zahlen sind.*

4.3.1. Koordinaten von X^ρ. Wir wählen eine Basis von U, dem Raum, auf den ρ projiziert, so dass $R = \{[0, x] \mid x \in \mathbb{K}^{2k-2}\}$ gilt. Sei $\mathcal{A}$ die affine Ebene $(X^\rho, \mathcal{L}^\rho)$. Wir setzen für diesen Unterabschnitt voraus, dass $\mathbb{K}$ eine von zwei verschiedende Charakteristik hat, dadurch können wir Lemma 4.3.13 anwenden und es gilt $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_2\mathbb{F}$, wobei $\mathbb{F}$ assoziativ oder eine Oktavenalgebra ist. Mit $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ bezeichnen wir den projektiven Abschluss der affinen Ebene $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ mit der dabei hinzugefügten unendlich fernen Geraden S.

4.3.15. LEMMA. *Der Kern von $\mathbb{F}$ enthält eine zu $\mathbb{K}$ isomorphe Unteralgebra von $\mathbb{F}$.*

Beweis: Sei $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ und $\varphi : U \to U$ die Abbildung, die einen Punkt $[x_0, x_1, \ldots, x_{2k-2}]$ auf den Punkt $[x_0, x_1a, \ldots, x_{2k-2}a]$ abbildet. Sei φ' die Fortsetzung von $\varphi|_{U\backslash R}$ auf $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$. Dann ist φ' nach Lemma 2.3.4 ein Automorphismus von $\overline{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ mit Achse S. Als Automorphismus mit Achse hat φ' auch ein Zentrum z. Läge z auf S, wäre φ' eine Elation, was nicht sein kann, weil dann φ eine Translation wäre. Somit liegt $z \notin S$. Mit passend gewählten Koordinaten ist $\varphi|_{U\backslash R}$ also eine Streckung um einen Faktor $b \in \mathbb{F}$. Die Gruppe der Streckungen ist zu $K(\mathbb{F})$, dem Kern von $\mathbb{F}$, isomorph. Die Streckungen, die wie $\varphi|_{U\backslash R}$ aus Streckungen von $U\backslash R$ entstehen, bilden eine zu $\mathbb{K}^*$ isomorphe Untergruppe von $K(\mathbb{F})$. Wir identifizieren diese Untergruppe von nun an mit $\mathbb{K}^*$. Somit ist $\varphi|_{U\backslash R}$ eine Streckung von $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ mit einem Streckfaktor aus $\mathbb{K}$. □

Von nun an identifizieren wir $\mathbb{K}^*$ mit der wie in Lemma 4.3.17 definierten Untergruppe von $K(\mathbb{F})$.

4.3.16. LEMMA. *Falls $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, gilt $\mathbb{K} \subseteq K(\mathbb{F}) = N_l(\mathbb{F}) = N_m(\mathbb{F}) = N_r(\mathbb{F}) = Z(\mathbb{F})$. Dabei bezeichnen $N_l(\mathbb{F}) = N_m(\mathbb{F}) = N_r(\mathbb{F})$ die Nuklei von $\mathbb{F}$ im Sinne von Definition 2.1.6. Ist außerdem $k = 9$, gilt $\mathbb{K} = Z(\mathbb{F})$.*

Beweis: Wir betrachten die Gruppe der Streckungen von $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_2\mathbb{F}$, also der Kollineationen von $P_2\mathbb{F}$ mit Achse R und einem Zentrum $z \notin R$. Nach Lemma 4.3.15 sind Streckungen in $U\backslash R$ auch Streckungen in $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$, also ist $\mathbb{K} \subseteq K(\mathbb{F})$. Die Gruppe der Streckungen ist nach [**HP**, Theorem 8.2] isomorph zur multiplikativen Gruppe des Rechtsnukleus. Da $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, ist $\mathbb{F}$ nach Lemma 4.3.13 eine Oktavenalgebra und nach dem Bruck-Kleinfeld-Theorem [**BK**, Theorem A, corollary2] sind Kern, Zentrum und alle drei Nuklei gleich. Bei $k = 9$ folgt $\mathbb{K} = Z(\mathbb{F})$ dann aus Dimensionsgründen. □

4.3.17. LEMMA. *Wir können $\mathbb{K}$ so in $\mathbb{F}$ einbetten, dass die $\mathbb{K}-$ Vektorraumstrukturen von $\mathbb{F}^2$ und $\mathbb{K}^{2k-2}$ übereinstimmen.*

Beweis: Nach Korollar 2.3.6 und Lemma 2.3.4 sind die Translationen von $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ genau die Translationen von $U\backslash R$, also die Kollineationen von U mit Achse R und einem Zentrum $z \in R$. Damit ist klar, dass die beiden Additionen gleich sind.
Mit Lemma 4.3.15 ist gezeigt, dass auch die $\mathbb{K}-$Linksmultiplikationen von $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ und $U\backslash R$ bei passender Koordinatenwahl gleich sind. □

4.3.18. Lemma. *Die Multiplikation von $\mathbb{F}$ ist $\mathbb{K}-$linkslinear, insbesondere ist $\mathbb{F}$ eine $\mathbb{K}-$Linksalgebra der Dimension $k-1$. Wenn $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, ist $\mathbb{F}$ eine Oktavenalgebra deren Grundkörper $\mathbb{K}$ als Unterkörper enthält.*

Beweis: Wenn $\mathbb{F}$ assoziativ ist, gilt offensichtlich für alle $f, g \in \mathbb{F}$, $r \in \mathbb{K}$ die Gleichung: $(rf)g = r(fg)$, also ist die Multiplikation $\mathbb{K}-$linkslinear und $\mathbb{F}$ eine $\mathbb{K}-$Linksalgebra. Wenn $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, gilt $(rf)g = r(fg)$ nach Lemma 4.3.16.
Da Geraden in $(X, \mathcal{L})$ über $\mathbb{K}$ Dimension $(k-1)$ haben, hat auch $\mathbb{F}$ als Linksvektorraum über $\mathbb{K}$ Dimension $(k-1)$. Nach Lemma 4.3.13 ist $\mathbb{F}$ assoziativ oder eine Oktavenalgebra, deren Grundkörper nach Lemma 4.3.16 den Körper $\mathbb{K}$ als Unterkörper enthält. □

Falls $k = 9$ gilt und $(X, \mathcal{L})$ nicht-desarguessch ist, ist also $\mathbb{F}$ nach Lemma 4.3.18 Oktavenalgebra, mit Grundkörper $\mathbb{K}$. Daher nennen wir diesen Fall den *Oktavenfall*.

4.3.19. Lemma. *Sei $f \in \mathbb{F}$ und $\psi : (x, y) \mapsto (xf, yf)$. Dann existiert eine Fortsetzung von $\psi|_{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ zu einer Kollineation von U.*

Beweis: Die Abbildung ψ ist $\mathbb{K}-$linear, weil $\mathbb{K}$ nach Lemma 4.3.16 im Linksnukleus von $\mathbb{F}$ liegt. Als lineare Abbildung lässt sich $\psi|_{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ zu einer Kollineation von U fortsetzen. □

4.3.20. Bemerkung. *Lemma 4.3.19 besagt nicht, dass die Fortsetzung von $\psi|_{\mathcal{A}_2\mathbb{F}}$ auch eine Streckung ist. Möglicherweise besitzt diese Fortsetzung kein Zentrum und keine Achse. Falls $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, ist die Abbildung ψ möglicherweise kein Isomorphismus von $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$, die Fortsetzung ist aber immer eine Kollineation von U.*

4.3.21. Korollar. *Falls k nicht kongruent* 1 *modulo* 8 *ist, ist $\mathbb{F}$ assoziativ.*

Beweis: Nach Lemma 4.3.16 ist $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathbb{F})$. Damit ist die Dimension von $\mathbb{F}$ über $\mathbb{K}$ ein Vielfaches der Dimension von $\mathbb{F}$ über $Z(\mathbb{F})$ und die ist, falls $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, nach Lemma 4.3.18 genau 8. □

4.3.2. Ausgezeichnete Isomorphismen.

Im endlichen Fall ($|\mathbb{K}| < \infty$), lässt sich nach **[CTM]** jeder Isomorphismus zu einer Äquivalens fortsetzen. Um den Fortsetzungssatz auch im unendlichen Fall verwenden zu können, führen wir den Begriff ausgezeichneter Isomorphismus ein:

4.3.22. Definition. Isomorphismen zwischen zwei $(n, k)-$Caps, die generische Untercaps auf generische Untercaps abbilden, nennen wir *ausgezeichnete Isomorphismen*.

Da Äquivalenzen von $(n,k)-$Caps sowohl $2-$Räume in $P_n\mathbb{K}$ auf $2-$Räume in $P_n\mathbb{K}$ abbilden, als auch Unterebenen von $(X,\mathcal{L})$ auf Unterebenen des Bildcaps abbilden, ist mit Korollar 4.3.11 klar, dass die Einschränkung einer Äquivalenz ein ausgezeichneter Isomorphismus ist.
Umgekehrt werden wir in Satz 4.4.5 sehen, dass sich ausgezeichnete Isomorphismen zu einer Äquivalenz fortsetzen lassen.
Daher werden wir in den Lemmata dieses Unterabschnittes einige Beispiele für ausgezeichnete Isomorphismen kennen lernen. Dabei gelten die folgenden Konventionen:
Seien $(X,\Xi,\mathcal{L})$ und $(X',\Xi',\mathcal{L}')$ zwei $(3k-1,k)-$Caps über demselben Körper $\mathbb{K}$ und $\beta : X \to X'$ ein Isomorphismus zwischen beiden. Mit U', R', ρ' bezeichnen wir die analog zu X für X' konstruierten Räume und Abbildungen. Dabei wählen wir als Zentrum von ρ' natürlich $\langle L^\beta\rangle \in \Xi'$. Weil die Ebenen $(X,\mathcal{L})$ und $(X',\mathcal{L}')$ isomorph sind, ist $P_2\mathbb{F} \cong P_2\mathbb{F}'$. Weil $\mathbb{F}$ und $\mathbb{F}'$ alternative Divisionsalgebren sind, muss damit nach [**Lu**, Theorem 1.11] auch $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}'$ gelten. Nach Lemma 4.3.18 können wir damit sowohl $\mathbb{F}$ als auch $\mathbb{F}'$ als $\mathbb{K}-$Vektorräume auffassen.

4.3.23. Lemma. *Falls $\mathbb{K} = K(\mathbb{F})$ gilt, ist jeder Isomorphismus β ausgezeichnet.*

Beweis: Weil $\rho|_X$ und $\rho|'_X$ affine Isomorphismen sind, gibt es einen affinen Isomorphismus $\delta := \rho|_X^{-1}\beta\rho' : \mathcal{A}_2\mathbb{F} \to \mathcal{A}_2\mathbb{F}'$ so, dass $\beta\rho'|_{X'} = \rho|_X\delta$ gilt. Das heißt, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & X' \\ \downarrow^{\rho} & & \downarrow^{\rho'} \\ \mathcal{A}_2\mathbb{F} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{A}_2\mathbb{F}' \end{array}$$

Sei η ein generisches Untercap in $(X,\mathcal{L})$, dann ist $E := (\eta\backslash L)^\rho$ ein affiner $2-$Raum in $U\backslash R$, der in keinem Bild eines Blockes enthalten ist. Für geeignete $p,s,t \in \mathbb{K}^{2k-2}$ gilt dann $E = p + \mathbb{K}s + \mathbb{K}t$. Wir wählen in $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ einen Nullpunkt 0 und in $\mathcal{A}_2\mathbb{F}'$ wählen wir 0^δ als Nullpunkt. Somit ist der affine Isomorphismus δ nach [**Lu**, Theorem 1.10] zugleich eine semilineare Abbildung von $\mathbb{F}^2$ als $K(\mathbb{F})-$Vektoraum auf $\mathbb{F}'^2$ als $K(\mathbb{F}')-$Vektoraum. Damit ist der Kern von $\mathbb{F}'$ isomorph zu $K(\mathbb{F}) = \mathbb{K}$, kann also ebenfalls mit $\mathbb{K}$ identifiziert werden. Damit ist gezeigt, dass δ die Unterebene E auf eine Unterebene der Form $E^\delta = p' + \mathbb{K}s' + \mathbb{K}t'$ mit passenden $p', s', t' \in \mathcal{A}_2\mathbb{F}$ abbildet.
Da δ ein affiner Iomorphismus ist, ist mit E auch E^δ in keinem Bild eines Blockes enthalten. Also ist $\eta^\beta = E^{\delta\rho'^{-1}} \cup (\eta^\beta \cap L')$ ein generisches Untercap von $(X',\Xi',\mathcal{L}')$. □

4.3.24. Korollar. *Im quadratischen Fall und im Oktavenfall, also wenn $k = 2$ gilt oder wenn $k = 9$ gilt und $(X,\mathcal{L})$ nicht-desarguessch ist, ist mit Lemma 4.3.16 jeder Isomorphismus β ausgezeichnet.*

Auch wenn sich Lemma 4.3.23 direkt nur auf den quadratischen Fall und den Oktavenfall anwenden lässt, liefert es zusammen mit einer Variation des Beweises auch eine Aussage für den Fall, indem $\mathbb{K}$ das Zentrum von $\mathbb{F}$ ist:

4.3.25. Korollar. *Falls $\mathbb{K}$ das Zentrum von $\mathbb{F}$ ist, ist jeder Isomorphismus β ausgezeichnet.*

Beweis: Falls $\mathbb{F}$ nicht assoziativ ist, ist die Behauptung mit Korollar 4.3.24 bewiesen. Andernfalls sind $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ und $\mathcal{A}_2\mathbb{F}'$ desarguessche affine Ebenen und jeder Isomorphismus $\mathcal{A}_2\mathbb{F} \to \mathcal{A}_2\mathbb{F}'$ ist semilinear.
Weil $\rho|_X$ und $\rho|'_X$ affine Isomorphismen sind, ist auch $\delta := \rho|_X^{-1}\beta\rho' : \mathcal{A}_2\mathbb{F} \to \mathcal{A}_2\mathbb{F}$ ein affiner Isomorphismus. Sei η ein generisches Untercap in $(X, \mathcal{L})$, dann ist $E := (\eta\backslash L)^\rho$ ein affiner $2-$Raum in $U\backslash R$, der in keinem Bild eines Blockes enthalten ist. Für geeignete $p, s, t \in \mathbb{K}^{2k-2}$ gilt dann $E = p+\mathbb{K}s+\mathbb{K}t$. Weil δ semilinear ist, bildet δ die Unterebene E auf eine Unterebene der Form $E^\delta = p' + \mathbb{K}s' + \mathbb{K}t'$ mit passenden $p', s', t' \in \mathcal{A}_2\mathbb{F}$ ab. Da δ ein affiner Iomorphismus ist, ist mit E auch E^δ in keinem Bild eines Blockes enthalten. Also ist $\eta^\beta = E^{\delta\rho'^{-1}} \cup (\eta^\beta \cap L')$ ein generisches Untercap von $(X', \Xi', \mathcal{L}')$. $\square$

4.3.26. Lemma. *Wenn sich der affine Isomorphismus $\rho|_X^{-1}\beta\rho'$ zu einer Kollineation von U auf U' fortsetzen lässt, ist β ausgezeichnet. Dies gilt insbesondere für Elationen und von einem Element aus $\mathbb{K}$ induzierte Homologien von (X, Ξ) auf sich selbst.*
Beweis: Nach Voraussetzung werden $2-$Räume in $U = P_{2k-2}\mathbb{K}$ von $\rho^{-1}\beta\rho'$ auf $2-$Räume in U' abgebildet. Also erhält β generische Untercaps. Wenn β eine Elation bzw. eine von einem Element aus $\mathbb{K}$ induzierte Homologie ist, ist $\rho^{-1}\beta\rho'$ eine Translation bzw. Streckung von $\mathcal{A}$ und als solche nach Lemma 4.3.17 zu einer Kollineation fortsetzbar. $\square$

4.3.27. Lemma. *Automorphismen von $(X, \mathcal{L})$, die Achse und Zentrum haben, sind ausgezeichnet.*
Beweis: Im Oktavenfall ist die Behauptung mit Korollar 4.3.24 bewiesen. Sei also $\mathbb{F}$ assoziativ und $\varphi : (X, \mathcal{L}) \to (X, \mathcal{L})$ ein Automorphismus mit Zentrum z und Achse L. Gilt $z \in L$, ist die Behauptung mit Lemma 4.3.26 bewiesen. Gelte also $z \notin L$. Dann ist bei passender Wahl der Koodinaten $L = [\infty], z = (0, 0) \in \mathcal{A}_2\mathbb{F}$ die Einschränkung von φ auf $\mathcal{A}_2\mathbb{F}$ von der Form $(x, y) \mapsto (xf, yf)$ mit einem $f \in \mathbb{F}$ und daher nach Lemma 4.3.19 und Lemma 4.3.26 ausgezeichnet. $\square$

Die ausgezeichneten Isomorphismen bilden offensichtlich eine Gruppe. Für diese Gruppe gilt:

4.3.28. Korollar. *Die Gruppe der ausgezeichneten Automorphismen ist transitiv auf nicht ausgearteten Vierecken.*
Beweis: Falls $(X, \mathcal{L})$ nicht-desarguessch ist, sind nach Korollar 4.3.24 alle Automorphismen ausgezeichnet. Da $(X, \mathcal{L})$ eine Moufangebene ist, sind diese Automorphismen transitiv auf nicht ausgearteten Vierecken. Falls $(X, \mathcal{L})$ desarguessch ist, ist bereits die von allen Zentralkollineationen erzeugte Gruppe transitiv auf nicht ausgearteten Vierecken. Diese sind nach Lemma 4.3.27 ausgezeichnet. $\square$

Das folgende Lemma könnten wir als Korollar von Korollar 4.3.24 betrachten. Es taucht ebenfalls in [**FM**] auf, wir könnten es also auch zitieren. Dennoch wollen wir uns hier einen kurzen eigenen Beweis ansehen. Dieser verdeutlicht, wie viel einfacher die meisten Argumente dieses Abschnittes sind, wenn $k = 2$ gilt.

4.3.29. LEMMA. *Falls $k = 2$ gilt, ist jeder Isomorphismus β ausgezeichnet, und $\rho|X$ lässt sich zu einen Isomorphismus von $(X, \mathcal{L})$ auf U fortsetzen.*

Beweis: Wegen $k = 2$ gilt $\dim U = 2$. Also ist U ein $2-$Raum und $(X, \mathcal{L})$ ist zu $U = P_2\mathbb{K}$ isomorph und $\rho|X$ ist ein Isomorphismus affiner Räume. Jeder Isomorphismus von $(X, \mathcal{L})$ auf ein anderes $(5, 2)-$Cap $(X', \mathcal{L}')$ bildet damit das einzige generische Untercap auf das einzige generische Untercap ab, und ist damit ausgezeichnet. □

Lemma 4.3.29 verwendet und verdeutlicht, dass die von $P_n\mathbb{K}$ und $(X, \mathcal{L})$ induzierten affinen Strukturen auf X^ρ für $k = 2$ übereinstimmen. Das folgende Lemma ist eine wichtige Vorbereitung des Äquivalenzsatzes.

4.3.30. LEMMA. *Seien $(X, \Xi, \mathcal{L})$ und $(X', \Xi', \mathcal{L}')$ zwei $(5, 2)-$Caps und seien $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ mit $L_1 = \xi_1 \cap X$ und $L_2 = \xi_2 \cap X$ zwei elliptische Räume, auf denen lineare Kollineationen $\alpha_i : \xi_i \to \xi'_i \in \Xi'$ mit $L_i^{\alpha_i} \subset X'$ definiert sind, so dass $(L_1 \cap L_2)^{\alpha_1} = (L_1 \cap L_2)^{\alpha_2}$ gilt. Dann gibt es einen ausgezeichneten Isomorphismus $\beta : (X, \mathcal{L}) \to (X', \mathcal{L}')$, der auf L_i mit α_i übereinstimmt.*

Beweis: Da wir jeden Block als Zentrum von ρ wählen können, können wir annehmen, dass $L_1 \cap L_2$ nicht in $L = X \cap Z(\rho)$ liegt. Sei nun $L' \in \mathcal{L}'$ der Verbindungsblock von $(L_1 \cap L)^{\alpha_1}$ und $(L_2 \cap L)^{\alpha_2}$. Ferner sei ρ' eine Zentralprojektion mit Zentrum $\langle L' \rangle$.
Weil sich die Definitionsbereiche von α_1 und α_2 in genau einem Punkt schneiden, existiert eine lineare Kollineation $\alpha : P_n\mathbb{K} \to P_n\mathbb{K}$, die α_1 und α_2 fortsetzt und $\langle L \rangle$ auf $\langle L' \rangle$ abbildet. Wir merken an, dass hier nicht $L^\alpha = L'$ gefordert wird.
Nach Lemma 4.3.4 ist $(U \backslash X^\rho)^{\rho^{-1}}$ ein $(3k - 2)-$Raum und es gilt:

$$
\begin{aligned}
(U \backslash X^\rho)^{\rho^{-1}\alpha} &= \langle T_{L_1 \cap L}(L_1), T_{L_2 \cap L}(L_2), \langle L \rangle \rangle^\alpha \\
&= \left\langle T_{L_1^{\alpha_1} \cap L'}(L_1^{\alpha_1}), T_{L_2^{\alpha_2} \cap L'}(L_2^{\alpha_2}), \langle L' \rangle \right\rangle \\
&= (U' \backslash X^{\rho'})^{\rho'^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Daher erhalten wir eine bijektive Abbildung $\beta_0 := \rho|_X^{-1} \alpha \rho' : X^\rho \to X'^{\rho'}$, die punktierte Geraden auf punktierte Geraden abbildet, also ein affiner Isomorphismus bezüglich der von $P_n\mathbb{K}$ induzierten Inzidenz ist. Da die Bilder von Blöcken genau die Geraden von U sind, ist damit β_0 auch ein Isomorphismus der Andre-Bose-Bruck-Darstellungen der beiden $(5, 2)-$Caps.
Weil β_0 für $i \in \{1, 2\}$ die punktierte Gerade L_i^ρ auf $L_i^{\alpha_i \rho'}$ abbildet, ist unser gesuchtes β dann die Fortsetzung von $\rho \beta_0 \rho'^{-1} : X \backslash L \to X' \backslash L'$ auf ganz X, die nach Lemma 4.3.29 ausgezeichnet ist. □

4.4. Kriterien für die Äquivalenz von $(n, k)-$Caps

Wir wollen nun Kriterien für die Äquivalenz von $(n, k)-$Caps vom Index 2 zeigen. Zum einen den Fortsetzungssatz, der besagt, dass durch einen ausgezeichneten Isomorphismus isomorphe $(n, k)-$Caps bereits äquivalent sind und zum anderen den Äquivalenzsatz, dass $(n, k)-$Caps,

deren Blöcke äquivalent sind, auch als $(n,k)-$Caps äquivalent sind.
Wir benötigen noch drei technische Hilfssätze. Lemma 4.4.1 wurde mit entsprechend verringerten Dimensionen bereits von B.N. Cooperstein, J.A. Thas und H. Van Maldeghem in [**CTM**] bewiesen, der erste Teil von Lemma 4.4.2 und der Existenzzteil von Satz 4.4.5 ebenfalls. Wie in den vorherigen Abschnitten setzen wir voraus, dass der Index des gegebenen $(n,k)-$Caps 2 ist. Größere Indizes werden in Abschnitt 4.8 behandelt.

4.4.1. Lemma. *Seien $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$, so dass die Schnittpunkte $x_{12} := L_1 \cap L_2$, $x_{13} := L_1 \cap L_3$ und $x_{23} := L_2 \cap L_3$ paarweise voneinander verschieden sind. Sei $a \in \langle x_{12}, x_{23}\rangle \backslash X$.*
Sei $Z := T_{x_{12}}(L_2) \cap T_{x_{23}}(L_2)$ und sei $x_2 \in X \cap \langle Z, a\rangle$. Weiterhin seien $x_1 \in L_1 \backslash \{x_{12}, x_{13}\}$ und $x_3 \in L_3 \backslash \{x_{13}, x_{23}\}$, so dass sich die Blöcke $L(x_{23}, x_1)$, $L(x_{13}, x_2)$ und $L(x_{12}, x_3)$ in genau einem Punkt x_0 schneiden. Dann ist $\langle x_1, T_{x_{23}}(L_3)\rangle \cap \langle x_3, T_{x_{12}}(L_1)\rangle$ genau ein Punkt a' und es gilt $a = \langle T(x_{13}), a'\rangle \cap \langle x_{12}, x_{23}\rangle$.

Beweis: Der Beweis ist fast identisch zu dem von [**CTM**, Lemma 2.7]:
Der Aufspann $\langle x_1, T_{x_{23}}(L_3), x_3, T_{x_{12}}(L_1)\rangle = \langle L_1, L_3\rangle$ ist ein $(2k)-$Raum. Daher ist $\langle x_1, T_{x_{23}}(L_3)\rangle \cap \langle x_3, T_{x_{12}}(L_1)\rangle = a'$ genau ein Punkt. Wegen $\langle T(x_{13}), a', x_{12}, x_{23}\rangle = \langle L_1, L_3\rangle$ ist auch $\langle T(x_{13}), a'\rangle \cap \langle x_{12}, x_{23}\rangle = a_0$ genau ein Punkt. Damit sind a', x_0 und Z im Raum $\langle x_1, T(x_{23})\rangle \cap \langle x_3, T(x_{12})\rangle$ enthalten. Wegen $\langle x_1, T(x_{23}), x_3, T(x_{12})\rangle = P_n\mathbb{K}$ und $\dim Z = k-2$ ist $\dim\langle x_1, T(x_{23})\rangle \cap \langle x_3, T(x_{12})\rangle = ((2k-2)+1) + ((2k-2)+1) - (3k-1) = k-1 = \dim\langle Z, x_0\rangle$, also ist $\langle x_1, T(x_{23})\rangle \cap \langle x_3, T(x_{12})\rangle = \langle Z, x_0\rangle$. Damit ist a' und somit auch a_0 im Raum $\langle T(x_{13}), x_0, Z\rangle$ enthalten. Nach Lemma4.2.54 ist $T(x_{13}) \cap \langle L_2\rangle = \emptyset$, deswegen gilt $\dim\langle T(x_{13}), x_0, Z\rangle \cap \langle L_2\rangle \leq k-1$. Da dieser Schnitt aber Z und den nicht in Z enthaltenen Punkt $x_2 = L(x_{13}, x_0) \cap L_2$ enthält, ist die Dimension genau $k-1$ und es gilt $\langle T(x_{13}), x_0, Z\rangle \cap \langle L_2\rangle = \langle Z, a\rangle$. Damit ist $a_0 \in \langle Z, a\rangle$.
Nehmen wir an a_0 und a wären verschieden. Dann schneidet die Gerade $\langle a, a_0\rangle$ den Raum Z. Wegen $Z \cap \langle x_{12}, x_{23}\rangle = \emptyset$, ist damit $\langle x_{12}, x_{23}\rangle \neq \langle a, a_0\rangle$, aber beide haben die Punkte a und a_0 gemeinsam, also ist $a = a_0$. $\square$

Die Aussage des technisch wirkenden Lemmas 4.4.1 ist, dass die Punkte auf der Geraden $x_{12}x_{23}$, auch die nicht in X liegenden, bereits durch Informationen über L_1 und L_3 festgelegt sind. Dieser Zusammenhang ist bei den Beweisen des Fortsetzungssatzes (Satz 4.4.5) und des Äquivalenzsatzes (Satz 4.4.9) von Zentraler Bedeutung.
Das nächste Lemma gibt uns weitere Informationen über das Schnittverhalten von Blöcken und Tangentialräumen. Der erste Teil des Beweises wird B.N. Cooperstein, J.A. Thas, H. Van Maldeghem in [**CTM**] als Bestandteil des Beweises des Fortsetzungssatzes im endlichen Fall fast genauso wie hier bewiesen. Der zweite Teil, des Beweises, den wir für den Äquivalenzsatz brauchen werden, stammt aus keiner bisherigen Veröffentlichung.

4.4.2. Lemma. *Seien $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ drei paarweise verschiedene Blöcke mit verschiedenen Schnittpunkten $x_{12} := L_1 \cap L_2$, $x_{13} := L_1 \cap L_3$ und $x_{23} := L_2 \cap L_3$. Für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ seien $x_i \in L_i \backslash \{x_{ij}, x_{ik}\}$ und $L_{i+3} := L(x_{kj}, x_i)$. Dann gilt:*
$\langle T(x_{12}), x_3\rangle \cap \langle T(x_{23}), x_1\rangle \cap \langle T(x_{13}), x_2\rangle = L_4 \cap L_5 \cap L_6$.

Beweis: Die Räume $\langle T(x_{12}), x_3\rangle$ und $\langle T(x_{23}), x_1\rangle$ haben jeweils Dimension $2k-1$. Ihr Aufspann enthält die drei Blöcke L_1, L_2, L_3 und ist daher nach Lemma 4.2.5(2) bereits der ganze $P_n\mathbb{K}$. Das heißt, $\langle T(x_{12}), x_3\rangle$ und $\langle T(x_{23}), x_1\rangle$ schneiden sich in einem $(k-1)-$Raum V.
Der $(k-1)-$Raum V enthält den $(k-2)-$Raum $N := T_{x_{12}}(L_2) \cap T_{x_{23}}(L_2)$. Nehmen wir an, der Schnitt $V \cap \langle T(x_{13}), x_2\rangle$ enthielte eine Gerade, dann enthielte N einen Punkt c aus $\langle T(x_{13}), x_2\rangle$. Weil $\langle L_2\rangle \cap T(x_{13})$ nach Lemma 4.2.5(4) leer ist, ist x_2 der einzige Schnittpunkt von $\langle L_2\rangle$ und $\langle T(x_{13}), x_2\rangle$. Wegen $N \subseteq \langle L_2\rangle$ gilt daher $c = x_2$. Damit enthielte N einen Punkt aus X, was nicht sein kann, da N der Schnitt von zwei Tangentialräumen ist. Deswegen ist $\langle T(x_{12}), x_3\rangle \cap \langle T(x_{23}), x_1\rangle \cap \langle T(x_{13}), x_2\rangle$ höchstens ein Punkt. Für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ gilt $L_{i+3} \subset \langle T(x_{jk}), x_i\rangle$. Falls ein Punkt $x := L_4 \cap L_5 \cap L_6$ existiert, ist x daher der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von $\langle T(x_{12}), x_3\rangle$, $\langle T(x_{23}), x_1\rangle$ und $\langle T(x_{13}), x_2\rangle$.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass kein Schnittpunkt $L_4 \cap L_5 \cap L_6$ existiert. Wegen $L_{i+3} \subseteq \langle T(x_{jk}), x_i\rangle$ enthält V den Punkt $x_{46} := L_4 \cap L_6$. Deswegen ist $V = \langle N, x_{46}\rangle$. Außerdem enthält $T(x_{13})$ nach Definition alle Tangentialräume an x_{13}.
Damit gilt: $W := \langle V, T(x_{13}), x_2\rangle \supseteq \langle L_5, x_{46}, T_{x_{13}}(L(x_{13}, x_{46})), N\rangle \supseteq \langle L_5, L(x_{13}, x_{46}), N\rangle$. Damit enthält W die beiden Punkte x_2 und $L(x_{13}, x_{46}) \cap L_2$ aus L_2. Wegen $x_{46} \notin L_5$ sind beide verschieden. Damit ist $\langle L_2\rangle = \langle x_2, x_{46}, N\rangle \subseteq W$. Daher enthält W die drei sich nicht in einem Punkt schneidenden Blöcke L_2, L_5 und $L(x_{13}, x_{46})$. Daher gilt $\dim W = 3k-1$. Damit gilt auch $\dim(V \cap \langle T(x_{13}), x_2\rangle) = (k-1) + (2k-1) - (3k-1) = -1$, womit unsere Behauptung bewiesen ist. $\square$

Das folgende Korollar zeigt, dass eine Kollineation, welche auf drei Blöcken eine Äquivalenz ist, bereits eine Äquivalenz des ganzen $(n,k)-$Caps ist. Diese Erkentnnis wird die Beweise des Fortsetzungssatzes und des Äquivalenzsatzes vollenden.

4.4.3. Korollar. *Seien $(X, \Xi, \mathcal{L})$ und $(Y, \Psi, \mathcal{M})$ zwei $(n,k)-$Caps und sei $\alpha : P_n\mathbb{K} \to P_n\mathbb{K}$ eine Kollineation, die drei sich in verschiedenen Punkten schneidende Blöcke L_1, L_2, L_3 auf drei sich in verschiedenen Punkten schneidende Blöcke $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$ abbildet. Dann ist α eine Äquivalenz der $(n,k)-$Caps.*

Beweis: Sei nun $x \in X\backslash(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$. Nach Lemma 3.1.10 reicht es zum Beweis der Behauptung zu zeigen, dass $x^\alpha \in Y$ gilt. Für alle i,j,k mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ definieren wir $x_{ij} := L_i \cap L_j$ und $x_i := L(x_{jk}, x) \cap L_i$. Nach Lemma 4.4.2 ist x der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von $\langle T(x_{12}), x_3\rangle$, $\langle T(x_{23}), x_1\rangle$ und $\langle T(x_{13}), x_2\rangle$.
Da α eine Kollineation ist und $(X, \Xi, \mathcal{L})$ und $(Y, \Psi, \mathcal{M})$ zwei $(n,k)-$Caps sind, gilt nach Axiom (C3) die Gleichung

$T(x_{ij})^\alpha = \langle T_{x_{ij}}(L_i), T_{x_{ij}}(L_j)\rangle^\alpha = \langle T_{x_{ij}^\alpha}(M_i), T_{x_{ij}^\alpha}(M_j)\rangle = T(x_{ij}^\alpha)$. Damit gilt dann auch:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \langle T(x_{12}), x_3\rangle^\alpha \cap \langle T(x_{23}), x_1\rangle^\alpha \cap \langle T(x_{13}), x_2\rangle^\alpha \\ &= \langle T(x_{12}^\alpha), x_3^\alpha\rangle \cap \langle T(x_{23}^\alpha), x_1^\alpha\rangle \cap \langle T(x_{13}^\alpha), x_2^\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Anderseits gilt nach Lemma 4.4.2 für die drei Blöcke $M_4 := M(x_{23}^\alpha, x_1^\alpha)$, $M_5 := M(x_{13}^\alpha, x_2^\alpha)$ und $M_6 := M(x_{12}^\alpha, x_3^\alpha)$ die Gleichung $M_4 \cap M_5 \cap M_6 = \langle T(x_{23}^\alpha), x_1^\alpha\rangle \cap \langle T(x_{13}^\alpha), x_2^\alpha\rangle \cap \langle T(x_{12}^\alpha), x_3^\alpha\rangle$. Somit ist $x^\alpha = M_4 \cap M_5 \cap M_6 \in Y$ und daher ist α eine Äquivalenz zwischen den $(n,k)-$Caps

$(X, \Xi, \mathcal{L})$ und $(Y, \Psi, \mathcal{M})$. $\square$

4.4.1. Der Fortsetzungssatz. Als nächstes wollen wir den Fortsetzungssatz beweisen, der besagt, dass sich ausgezeichnete Isomorphismen zu Kollineationen fortsetzen lassen. Im ersten Schritt des Beweises spielt der Fall $k = 2$ eine Sonderrolle, da wir nur für $k > 2$ mit Lemma 2.4.2 die Einschränkung eines ausgezeichneten Isomorphismus auf einen Block zu einer Kollineation des Aufspannes dieses Blockes fortsetzen können. Der Fortsetzungssatz ließe sich für grössere k auch ohne direkten Rückgriff auf den Fall $k = 2$ beweisen. Dies zeigt der Beweis in [**CTM**, Theorem 4.1], wenn man dort die Baer-Unterebenen durch generische Untercaps ersetzt. Dennoch wird der Beweis schöner, wenn wir den Fall $k = 2$ extra betrachten und verwenden:

4.4.4. LEMMA. *Seien (X, Ξ) und (Y, Ψ) zwei $(5, 2)-$Caps vom Index 2 und $\beta : X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann lässt sich β zu einer eindeutig bestimmten Kollineation des $P_5\mathbb{K}$ fortsetzen, die X auf Y abbildet.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit:
Seien α und γ zwei Kollineationen, die β fortsetzen. Sei $\xi \in \Xi$ und $L = \xi \cap X$. Sei $a \in \xi$ und seien $x, y \in L$, so dass x, y, a nicht kollinear sind. Dann sind $\langle a, x\rangle$ und $\langle a, y\rangle$ Sekanten oder Tangenten, also stimmen ihre Bilder unter α und γ überein. Das muss auch für ihren Schnittpunkt a gelten. Somit stimmen α und γ auf jedem elliptischen Raum überein. Da sich je zwei elliptische Räume ξ_1 und ξ_2 in einem Punkt schneiden, stimmen α und γ auch auf $\langle \xi_1, \xi_2\rangle$ überein. Sei nun $\xi_3 \in \Xi$ so, dass $(\xi_1 \cap \xi_2) \notin \xi_3$ gilt, dann schneiden sich $\langle \xi_1, \xi_2\rangle$ und ξ_3 in einer Geraden, was bedeutet, dass α und γ auch auf $P_5\mathbb{K} = \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3\rangle$ übereinstimmen.
Nun zeigen wir die Existenz:
Nach [**SM1**, Theorem 2.2] existiert eine Kollineation $\gamma_X : P_5\mathbb{K} \to P_5\mathbb{K}$, die (X, Ξ) auf eine quadratische Veronesemannigfaltigkeit $V_\mathbb{K}$ abbildet, und eine Kollineation $\gamma_Y : P_5\mathbb{K} \to P_5\mathbb{K}$, die (Y, Ψ) auf eine quadratische Veronesemannigfaltigkeit $V'_\mathbb{K}$ abbildet. Damit ist $(\gamma|_X)^{-1}|_{V_\mathbb{K}}\beta\gamma_Y$ ein Isomorphismus zwischen den quadratischen Veronesemannigfaltigkeiten $V_\mathbb{K}$ und $V'_\mathbb{K}$. Nach Lemma 3.3.3 lässt sich jeder Isomorphismus von quadratischen Veronesemannigfaltigkeiten zu einer Äquivalenz δ fortsetzen. Damit erhalten wir eine Kollineation mit $\alpha := \gamma_X\delta\gamma_Y^{-1}$ eine Kollineation $P_5\mathbb{K} \to P_5\mathbb{K}$, die β fortsetzt. $\square$

4.4.5. SATZ. *Seien (X, Ξ) und (Y, Ψ) zwei $(n, k)-$Caps vom Index 2 in $P_n\mathbb{K}$ und $\beta : X \to Y$ ein ausgezeichneter Isomorphismus. Dann gibt es genau eine Kollineation des $P_n\mathbb{K}$, die β fortsetzt.*

Beweis: Da der Fall $k = 2$ bereits in Lemma 4.4.4 gezeigt ist, nehmen wir an, es gilt $k > 2$.
Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit:
Seien α und γ zwei Kollineationen, die β fortsetzen. Weil β als ausgezeichneter Isomorphismus in einem Block enthaltene Ovale auf in einem Block enthaltene Ovale abbildet, gibt es nach Lemma 2.4.2 auf jedem Block nur eine Fortsetzung von β. Daraus folgt, dass α und γ auf dem Aufspann eines Blockes übereinstimmen. Da sich je zwei elliptische Räume ξ_1 und ξ_2 in einem Punkt schneiden, stimmen α und γ auch auf $\langle \xi_1, \xi_2\rangle$ überein. Sei nun $\xi_3 \in \Xi$ so, dass

$(\xi_1 \cap \xi_2) \notin \xi_3$, dann schneiden sich $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ und ξ_3 in einer Geraden, was bedeutet, dass α und γ auch auf $P_n\mathbb{K} = \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle$ übereinstimmen.

Jetzt zeigen wir die Existenz einer Kollineation des $P_n\mathbb{K}$, die β fortsetzt:
Wir wählen drei verschiedene Blöcke L_1, L_2, L_3 mit $\langle L_i \rangle =: \xi_i \in \Xi$, so dass die Schnittpunkte $x_{12} := L_1 \cap L_2$, $x_{13} := L_1 \cap L_3$ und $x_{23} := L_2 \cap L_3$ paarweise voneinander verschieden sind. Für $i \in \{0, 1, 2\}$ sind nach Bemerkung 4.3.9(1) die nicht-trivialen $2-$Raumschnitte von L_i genau die Blöcke generischer Untercaps. Diese werden nach Voraussetzung von β auf Geraden generischer Untercaps von L_i^β abgebildet. Das heißt, β bildet $2-$Raumschnitte auf $2-$Raumschnitte ab. Daher gibt es nach Lemma 2.4.2 für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ eine Kollineation $\alpha_i : \xi_i \to \langle L_i^\beta \rangle$, die jedes $x \in L_i$ auf x^β abbildet.
Die Kollineationen α_i werden von semilinearen Abbildungen induziert. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ nennen wir den an α_i beteiligten $\mathbb{K}-$Automorphismus θ_i. Wir zeigen jetzt, dass $\theta_1 = \theta_2$ gilt:
Nach Lemma 4.3.10 gibt es ein generisches Untercap η von (X, Ξ), das die drei Punkte x_{12}, x_{13}, x_{23} enthält. Nach Voraussetzung ist dann η^β ein generisches Untercap von (Y, Ψ). Daher lässt sich β nach Lemma 4.4.4 zu einer eindeutig bestimmten Kollineation $\gamma : \langle \eta \rangle \to \langle \eta^\beta \rangle$ mit assoziiertem Körperautomorphismus θ fortsetzen. Dann muss γ für $i \in \{1, 2\}$ auf $\langle \eta \rangle \cap \xi_i$ mit α_i übereinstimmen, und es gilt: $\theta_1 = \theta = \theta_2$.
Deswegen und weil sich ξ_1 und ξ_3 nur im Punkt x_{13} schneiden und α_1 auf diesem Punkt mit α_3 übereinstimmt, existiert genau eine Kollineation $\alpha' : \langle \xi_1, \xi_3 \rangle \to \langle L_1^\beta, L_3^\beta \rangle$ mit $\alpha' = \alpha_1$ auf ξ_1 und $\alpha' = \alpha_3$ auf ξ_3. Die Definitionsbereiche von α' und α_2 schneiden sich aus Dimensionsgründen nur in der Geraden $g = \langle x_{12}, x_{23} \rangle$. Wir wollen jetzt zeigen, dass beide Abbildungen auf g übereinstimmen, indem wir in beiden Caps je einmal Lemma 4.4.1 anwenden:

Dafür definieren wir $Z := T_{x_{12}}(L_2) \cap T_{x_{23}}(L_2)$. Sei nun $x_2 \in L_2 \backslash \{x_{12}, x_{23}\}$ und $a := g \cap \langle x_2, Z \rangle$. Dann ist $x_2 \in \langle Z, a \rangle \cap X$. Seien $x_0 \in L(x_{13}, x_2) \backslash \{x_{13}, x_2\}$ und $x_1 := L_1 \cap L(x_{23}, x_0)$ sowie $x_3 := L_3 \cap L(x_{12}, x_0)$. Dann ist nach Lemma 4.4.1 der Unterraum $\langle x_1, T_{x_{23}}(L_3) \rangle \cap \langle x_3, T_{x_{12}}(L_1) \rangle$ genau ein Punkt a' und es gilt $a = \langle T(x_{13}), a' \rangle \cap g$. Entsprechend ist dann $a^{\alpha_2} \in \langle x_{12}^\beta, x_{23}^\beta \rangle$ und $x_2^\beta \in \langle Z^{\alpha_2}, a^{\alpha_2} \rangle \cap Y$. Außerdem sind $x_0^\beta \in L(x_{13}^\beta, x_2^\beta) \backslash \{x_{13}^\beta, x_2^\beta\}$ und $x_1^\beta = L_1^\beta \cap L(x_{23}^\beta, x_0^\beta)$ sowie $x_3^\beta = L_3^\beta \cap L(x_{12}^\beta, x_0^\beta)$. Damit ist der Schnitt $\langle x_1^\beta, T_{x_{23}^\beta}(L_3^\beta) \rangle \cap \langle x_3^\beta, T_{x_{12}^\beta}(L_1^\beta) \rangle = (a')^{\alpha'}$ und es gilt nach Lemma 4.4.1 die Gleichung $a^{\alpha_2} = \langle T(x_{13}^\beta), (a')^{\alpha'} \rangle \cap \langle x_{12}^\beta, x_{23}^\beta \rangle = a^{\alpha'}$. Also stimmen α' und α_2 auf drei verschiedenen Punkten der Gerade g überein. Da α' und α_2 von semilinearen Abbildungen mit demselben Körperautomorphismus induziert werden, stimmen sie damit auf ganz g überein. Daher existiert eine Kollineation $\alpha : P_n\mathbb{K} = \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle \to P_n\mathbb{K}$, die auf $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ mit β übereinstimmt.

Nach Lemma 4.4.3 ist α damit eine Äquivalenz von (X, Ξ) auf sich selbst. Die Einschränkung von α auf X ist dann ein Isomorphismus von $(X, \mathcal{L})$, der auf drei Geraden punktweise mit β übereinstimmt, also gilt $\beta = \alpha|_x$ und α ist eine Fortsetzung von β. $\square$

Der Fortsetzungssatz und sein Beweis liefern einige interessante Korollare:

4.4.6. KOROLLAR. *Ein Isomorphismus zwischen zwei $(n, k)-$Caps, der sich auf drei verschiedenen Blöcken zu Äquivalenzen der Blöcke fortsetzen lässt, ist zu einer Äquivalenz der $(n, k)-$Caps fortsetzbar.*

Beweis: Der Beweis von Satz 4.4.5 ist zugleich der Beweis dieses Korollars. □

4.4.7. KOROLLAR. *Die Gruppe der Äquivalenzen von $(X, \mathcal{L})$ auf sich selbst ist transitiv auf nicht ausgearteten Vierecken und auf Tripeln von kollinearen Punkten.*

Beweis: Nach Korollar 4.3.28 wissen wir, dass die Gruppe der ausgezeichneten Isomorphismen und damit nach Satz 4.4.5 auch die Gruppe der Äquivalenzen transitiv auf nicht ausgearteten Vierecken ist. Haben wir es mit drei in einem gemeinsamen Block enthaltenen Punkten p_1, p_2, p_3 zu tun, finden wir ein nicht ausgeartetes Viereck, dessen Ecken die Punkte p_1, p_2 und zwei nicht in $L(p_1, p_2)$ enthaltene Punkte q_1, q_2 sind, so dass $p_3 = L(p_1, p_2) \cap L(q_1, q_2)$ gilt. Ein ebensolches Viereck finden wir zu den gewünschten ebenfalls auf einem gemeinsamen Block liegenden Bildpunkten und wir erhalten die gewünschte Äquivalenz mit Korollar 4.3.28. □

4.4.8. KOROLLAR. *Die Blöcke eines $(n, k)-$Caps mit Index 2 sind zueinander äquivalent.*

Beweis: Seien L_1 und L_2 Blöcke. Dann gibt es nach Lemma 2.3.9 eine Elation der Moufangebene $(X, \mathcal{L})$, die L_1 auf L_2 abbildet. Da Elationen nach Lemma 4.3.26 ausgezeichnet sind, lässt sich diese nach Satz 4.4.5 zu einer Kollineation des umgebenden Raumes fortsetzen. Die Einschränkung dieser Kollineation auf $\langle L_1 \rangle$ ist eine Äquivalenz zwischen L_1 und L_2. □

4.4.2. Beweis von Satz 3.4.1. Wir können jetzt mit Hilfe des Fortsetzungssatzes (Satz 4.4.5) eines unser Hauptziele beweisen. Die Rede ist von Satz 3.4.1, den wir zur Bequemlichkeit des Lesers wiederholen:
Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n, 9)-$Cap über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik. Wenn $(X, \mathcal{L})$ eine nicht-desarguessche projektive Ebene ist, dann ist $n = 26$ und $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ist äquivalent zur Veroneseeinbettung einer Oktavenebene über $\mathbb{K}$.
Nach Lemma 4.2.5 gilt $n = 26$.
Nach Lemma 4.3.13 ist $(X, \mathcal{L})$ isomorph zu einer Oktavenebene $P_2\mathbb{O}$. Dabei ist nach Lemma 4.3.16 der Körper $\mathbb{K}$ das Zentrum und der Kern von $\mathbb{O}$. Daher ist $\mathbb{O}$ eine Oktavenalgebra über $\mathbb{K}$ und somit existiert die Versoneseeinbettung der Oktavenebene $V_{\mathbb{O}}$. Daher gibt es einen Isomorphismus $\beta : (X, \mathcal{L}) \to V_{\mathbb{O}}$. Dieser ist nach Korollar 4.3.24 ausgezeichnet, also existiert nach Satz 4.4.5 eine Äquivalenz zwischen dem $(26, 9)-$Cap $(X, \Xi, \mathcal{L})$ und der Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{O}}$. □

4.4.3. Der Äquivalenzsatz. Wir wollen jetzt den Äquivalenzsatz beweisen, der in dieser Arbeit als entscheidendes Kriterium für die Äquivalenz von $(n,k)-$Caps verwendet werden soll. Der Beweis weist einige Parallen zu dem Beweis des Fortsetzungssatzes auf, muss jedoch ohne einen vorgegebenen Isomorphismus auskommen und beschäftigt sich daher mit Problemen, die beim Beweis des Fortsetzungssatzes nicht auftreten.

4.4.9. SATZ. *Seien $(X,\Xi,\mathcal{L})$ und $(Y,\Psi,\mathcal{M})$ zwei $(n,k)-$Caps vom Index 2, deren Blöcke zueinander linear äquivalente Quadriken sind. Für jeden Block $L \in \mathcal{L}$ sei die Gruppe der linearen Äquivalenzen von L auf sich selbst dreifach transitiv. Dann sind auch die Caps äquivalent.*

Beweis: Wir wählen drei verschiedene Blöcke $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$, so dass die drei Schnittpunkte $x_{12} := L_1 \cap L_2$, $x_{13} := L_1 \cap L_3$ und $x_{23} := L_2 \cap L_3$ paarweise voneinander verschieden sind und definieren $\xi_i := \langle L_i \rangle$. Analog wählen wir drei Blöcke $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$, so dass die drei Schnittpunkte $y_{12} := M_1 \cap M_2$, $y_{13} := M_1 \cap M_3$ und $y_{23} := M_2 \cap M_3$ paarweise voneinander verschieden sind und $\psi_i := \langle M_i \rangle$. Die Gruppe der linearen Kollineationen von $P_n\mathbb{K}$ ist transitiv auf $(n+2)-$Tupeln in allgemeiner Lage. In den drei $(k-2)-$ Räumen $T_{x_{ij}}(L_i) \cap T_{x_{ik}}(L_i)$ wählen wir je $k-1$ Punkte $w_{i1}, \dots, w_{i(k-1)}$ mit $\langle w_{i1}, \dots, w_{i(k-1)} \rangle = T_{x_{ij}}(L_i) \cap T_{x_{ik}}(L_i)$. Ebenso wählen wir in $Z_i := T_{y_{ij}}(M_i) \cap T_{y_{ik}}(M_i)$ ein $(k-1)-$Tupel erzeugender Punkte $z_{i1}, \dots, z_{i(k-1)}$.
Dann gibt es eine lineare Kollineation γ des $P_{3k-1}\mathbb{K}$, die das $(n+1)-$Tupel
$(x_{12}, x_{13}, x_{23}, w_{11}, \dots, w_{1(k-1)}, w_{21}, \dots, w_{2(k-1)}, w_{31}, \dots, w_{3(k-1)})$ auf das $(n+1)-$Tupel
$(y_{12}, y_{13}, y_{23}, z_{11}, \dots, z_{1(k-1)}, z_{21}, \dots, z_{2(k-1)}, z_{31}, \dots, z_{3(k-1)})$ abbildet.
Damit bildet γ für alle $i \neq j \in \{1,2,3\}$ den Raum ξ_i auf ψ_i, den Punkt x_{ij} auf y_{ij} und den Tangentialraum $T(x_{ji})$ auf den Tangentialraum $T(y_{ji})$ bezüglich (Y,Ψ) ab. Um etwas Schreibarbeit zu sparen, identifizieren wir ab jetzt $(X,\Xi,\mathcal{L})$ mit $(X^\gamma, \Xi^\gamma, \mathcal{L}^\gamma)$.

Dann sind L_i und M_i zwei linear äquivalente Quadriken, mit zwei gemeinsamen Punkten. Nach Voraussetzung gibt es eine lineare Kollineation α_1 von ψ_1 auf sich selbst, die y_{12} und y_{13} festhält und L_1 auf M_1 abbildet. Genauso gibt es eine lineare Kollineation von ψ_2 die y_{12} und y_{23} festhält und L_2 auf M_2 abbildet. Somit lassen sich α_1 und α_2 zu einer linearen Kollineation $\alpha' : \langle \psi_1, \psi_2 \rangle \to \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ fortsetzen. Insbesondere bildet α' die Tangentialräume $T(y_{12})$, $T_{y_{13}}(L_1)$ und $T_{y_{23}}(L_2)$ in (X,Ξ) auf die Tangentialräume $T(y_{12})$, $T_{y_{13}}(M_1)$ und $T_{y_{23}}(M_2)$ in (Y,Ψ) ab.

Unsere nächste Aufgabe ist, eine lineare Kollineation von ψ_3 zu finden, die L_3 auf M_3 abbildet und auf der Geraden $g := \langle y_{13}, y_{23} \rangle$ mit α' übereinstimmt. Dazu wollen wir ausnutzen, dass der Äquivalenzsatz mit den Lemmata 4.3.30 und 4.4.4 für $k=2$ bereits bewiesen ist. Sei also E ein $2-$Raum in ψ_3, der g enthält. Dann gibt es nach Lemma 4.3.10 ein generisches Untercap η von (X,Ξ), das den Punkt y_{12} als Punkt und das Oval $E \cap L_3$ als Punktmenge eines Blockes enthält. Ebenso gibt es ein generisches Untercap μ von (Y,Ψ), das $(\eta \cap L_1)^{\alpha_1}$ und $(\eta \cap L_2)^{\alpha_2}$ enthält. Nach Lemma 4.3.30 gibt es dann einen Isomorphismus $\eta \to \mu$, der $\alpha_1|_{M_1 \cap \eta}$ und $\alpha_2|_{M_2 \cap \eta}$ fortsetzt. Dieser lässt sich nach Lemma 4.4.4 zu einer Äquivalenz $\sigma : \eta \to \mu$ fortsetzen, die $\alpha_1|_{\psi_1 \cap \langle \eta \rangle}$ und $\alpha_2|_{\psi_2 \cap \langle \eta \rangle}$ fortsetzt, somit linear sein muss und daher auf g mit α' übereinstimmt.
Sei nun $Z_3 := T_{y_{13}}(L_3) \cap T_{y_{23}}(L_3)$. Dann schneiden sich Z_3 und E in genau einem Punkt, der von der linearen Äquivalenz σ auf sich selbst abgebildet wird. Daher gibt es eine lineare Kollineation $\alpha_3 : \psi_3 \to \psi_3$, die $\sigma|_E$ und $\mathrm{id}|_{Z_3}$ auf ψ_3 fortsetzt. Diese ist dann eine lineare

Kollineation von ψ_3, die auf g mit α' übereinstimmt. Nach Korollar 4.4.3 gibt es also eine lineare Äquivalenz, die das $(n,k)-$Cap (X,Ξ) auf ein $(n,k)-$Cap abbildet, das die drei Blöcke M_1, M_2 und $L_3^{\alpha_3}$ enthält. Dieses $(n,k)-$Cap identifizieren wir ab jetzt mit (X,Ξ).
Sei $x_3 \in E \cap L_3 \backslash \{y_{13}, y_{23}\} \subseteq L_3 \cap M_3$ und sei $a := \langle x_3, Z_3 \rangle \cap g$. Weil wir die Gruppe der linearen Äquivalenzen von L_3 als dreifach transitiv vorausgesetzt haben, gibt es eine lineare Kollineation $\gamma_3 : \psi_3 \to \psi_3$, die L_3 auf M_3 abbildet und dabei die drei Punkte $y_{13}, y_{23}, x_3 \in M_3 \cap L_3$ auf sich selbst abbildet. Dann gilt: $a^{\gamma_3} = (\langle x_3, Z_3 \rangle \cap g)^{\gamma_3} = \langle x_3, Z_3 \rangle \cap g = a$. Also ist γ_3 eine lineare Kollineation, die drei Punkte einer Geraden auf sich selbst abbildet. Daher gilt $\gamma_3|_g = \mathrm{id}|_{\mathrm{g}}$. Somit stimmen die linearen Kollineationen γ_3 und $\mathrm{id}|_{\langle \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 \rangle}$ auf g, dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche, überein. Deshalb gibt es eine gemeinsame Fortsetzung, die nach Korollar 4.4.3 eine Äquivalenz der $(n,k)-$Caps (X,Ξ) und (Y,Ψ) ist. □

4.5. Die geometrische Struktur der Blöcke

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass Blöcke eines $(n,k)-$Caps Quadriken sind. Für $k=5$ können wir die quadratische Gleichung eines Blockes explizit angeben. Die dabei notwendigen Berechnungen verwenden, dass der Grundkörper $\mathbb{K}$ eine von zwei verschiedene Charakteristik hat, was wir daher für diesen Abschnitt voraussetzen. Im darauffolgenden Abschnitt konstruieren wir mit Hilfe einer weiteren Voraussetzung an den Grundkörper $\mathbb{K}$ eine Veronesemannigfaltigkeit, deren Blöcke zu denen des gegebenen $(n,k)-$Caps äquivalent sind. Wir zeigen, dass alle weiteren Voraussetzungen des Äquivalenzsatzes (Satz 4.4.9) erfüllt sind. Damit ist dann gezeigt, dass jedes $(14,5)-$Cap über einem geeigneten Grundkörper zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist.

4.5.1. Lemma. *Alle Blöcke eines $(n,k)-$Caps sind Quadriken.*

Beweis: Sei E ein generisches Untercap des $(n,k)-$Caps $(X,\mathcal{L})$. Nach Bemerkung 4.3.9(2) ist klar, dass E ein $(5,2)-$Cap und somit nach [**SM1**, Theorem 2.2] zu einer Standard-Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist, dass $\mathbb{K}$ kommutativ ist, und dass alle nicht-trivialen $2-$Raumschnitte (solche die mindestens zwei Punkte enthalten) von Blöcken Quadriken sind. Nach Lemma 2.4.1 ist damit jeder Block eine Quadrik. □

4.5.1. Koordinaten eines Blockes im Fall k=5.

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass $(X,\Xi,\mathcal{L})$ ein $(14,5)-$Cap ist. Der Aufspann eines Blockes $L \in \mathcal{L}$ ist ein 5-dimensionaler projektiver Raum über $\mathbb{K}$, in dem L nach Lemma 4.5.1 eine Quadrik ist. Die Quadrik wird durch eine symmetrische Bilinearform $(p,q) \mapsto xMy^T$ definiert. Im Folgenden nennen wir zwei Punkte p,q senkrecht, wenn $pMq^T = 0$ gilt. Für eine Teilmenge $Z \subseteq \langle L \rangle$ definieren wir $Z^\perp = \{p \in \langle L \rangle \mid \forall q \in Z : pMq^T = 0\}$ und halten fest, dass $Z^\perp$ stets ein Unterraum ist. Für jeden Punkt $x \in L$ gilt dann nach Lemma 2.2.28 die Gleichung $x^\perp = T_x(L)$. Weil L keine Gerade enthält, ist die Quadrik nicht ausgeartet, und es gilt $\dim(\langle Z \rangle) + \dim(Z^\perp) = 4$.

Wir wollen nun die Matrix M bestimmen.

4.5.2. Lemma. *Sei L ein 4−dimensionales Ovoid und eine Quadrik in einem desarguesschen projektiven Raum über einem Körper mit Charakteristik ungleich zwei und mindestens 4 Elementen. Dann existieren $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}$, so dass L zu einer Quadrik mit Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist.

Beweis: Wir wählen zwei verschiedene Punkte $x, y \in L$ und vier paarweise senkrechte Punkte $a, b, c, d \in T_x(L) \cap T_y(L)$. Solche Punkte existieren, denn der Orthogonalraum eines Punktes ist stets ein 4−Raum. Die Geraden $\langle a, b\rangle$ und $\langle c, d\rangle$ können beide keine Punkte aus L enthalten, also keine Punkte die zu sich selbst senkrecht sind. Da die Geraden senkrecht aufeinander stehen, heißt das auch, dass sie sich nicht schneiden. Somit ist klar, dass $\langle L\rangle = \langle a, b, c, d, x, y\rangle$ gilt. Um $\langle L\rangle$ mit homogenen Koordinaten zu versehen, müssen wir 7 Punkte in allgemeiner Lage wählen und diesen Koordinatenvektoren aus $\mathbb{K}^6$ zuordnen, so dass je 6 der Koordinatenvektoren linear unabhängig sind. Wenn wir Koordinatenvektoren der 6 Punkte a, b, c, d, x, y als Basis des $\langle L\rangle$ zugrundeliegenden Vektorraumes wählen, muss M für geeignete $r_1, r_2, r_3, u \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}$$

haben. Der Äquivalenztyp der Matrix ändert sich nicht, wenn wir r_1 durch $s^2 r_1$ mit $s \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ ersetzen. Daher können wir, weil die Charakteristik von $\mathbb{K}$ von zwei verschieden ist und $|\mathbb{K}| > 3$ gilt, voraussetzen, dass $1 + r_1 + r_2 + r_3 \neq 0$ gilt.
Als siebten Punkt unserer projektiven Basis wählen wir einen Punkt $z \in L$, der in keinem von fünf Punkten aus $\{a, b, c, d, x, y\}$ aufgespannten 4−Raum liegt. Diesem weisen wir die Koordinaten $[1 + r_1 + r_2 + r_3, 1, 1, 1, 1, 1]$ zu. Dann muss M bezüglich der projektiven Basis $\{a, b, c, d, x, y, z\}$ die gewünschte Form haben. □

Seien ab jetzt r_1, r_2 und r_3 wie in Lemma 4.5.2. Mit diesen definieren wir das Polynom $p(x_0, x_1, x_2, x_3) := x_0^2 - r_1 x_1^2 - r_2 x_2^2 - r_3 x_3^2$. Dann ist $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in L$ genau dann, wenn $p(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_4 x_5$ gilt. Wir wollen ein paar Eigenschaften der Konstanten r_1, r_2 und r_3 bestimmen:

4.5.3. Lemma. *Das Polynom p hat in $\mathbb{K}^4$ keine nicht-trivialen Nullstellen und für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sind die Zahlen r_i sowie die negativen Produkte $-r_i r_j$ keine Quadrate in $\mathbb{K}$.*

Beweis: Hätte das Polynom p eine Nullstelle $(y_0, y_1, y_2, y_3) \neq (0, 0, 0, 0)$, wären die drei kollinearen Punkte $[y_0, y_1, y_2, y_3, 0, 1], [y_0, y_1, y_2, y_3, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1]$ in L enthalten, was nicht sein kann, weil L ein Ovoid ist.
Nehmen wir an, es existiert ein $w_1 \in \mathbb{K}$ mit $w_1^2 = r_1$. Dann ist $(w_1, 1, 0, 0)$ eine nicht-triviale Nullstelle von p, ein Widerspruch. Dies gilt analog für r_2 und r_3.
Nehmen wir nun an, es existiert ein $w \in \mathbb{K}$ mit $w^2 = -r_1 r_2$. Dann ist $(0, r_2, w, 0)$ eine nicht-triviale Nullstelle von p, ein Widerspruch. Dies gilt analog für $-r_1 r_3$ und $-r_2 r_3$. □

Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass es eine zu (X, Ξ) äquivalente Veronesemannigfaltigkeit gibt, wenn $-r_1 r_2$ und r_3 in derselben Quadratklasse liegen.

4.6. Konstruktion der passenden Veroneseeinbettung im Fall k=5

Wir wollen eine $\mathbb{K}-$Divisionsalgebra $\mathbb{F}$ konstruieren, die eine Veronesemannigfaltigkeit $V_\mathbb{F}$ in $P_n\mathbb{K}$ induziert, so dass die Blöcke von $V_\mathbb{F}$ zu einer Quadrik mit der Matrix M äquivalent sind. Dann wollen wir mit Satz 4.4.9 zeigen, dass unser $(5, 14)$-Cap zu der konstruierten Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist. Dies wird mit Satz 4.6.11 am Ende dieses Abschnittes erreicht. Wir werden dabei die Voraussetzung benötigen, dass r_3 und $-r_1 r_2$ in derselben Quadratklasse liegen.

4.6.1. Die Algebra $\mathbb{F}$.

Um eine geeignete Divisionsalgebra zu konstruieren, verwenden wir eine Art verallgemeinerten Cayley-Dickson-Prozess. Im ersten Schritt erweitern wir $\mathbb{K}$ mit einer Wurzel aus r_1, die wir α_1 nennen, und führen mit $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$ eine Konjugation ein. Dann wollen wir jedoch eine Wurzel α_2 von r_2 einführen, statt wie beim gewöhnlichen Cayley-Dickson-Prozess einer weiteren Wurzel aus r_1. Dennoch soll sich unsere Algebra ähnlich wie eine Cayley-Dickson-Algebra verhalten, insbesondere soll $\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_2\alpha_1$ gelten. Ebenfalls soll wie in einer Cayley-Dickson-Algebra das Produkt $\alpha_3 := \alpha_1\alpha_2$ eine Wurzel aus $-r_1 r_2$ sein und nicht Wurzel aus $r_1 r_2$, wie wir es beim Hinzufügen von Wurzeln aus verschiedenen Elementen von $\mathbb{K}$ bei einer Körpererweiterung erwarten würden. Um diese Vorgaben zu erfüllen, konstruieren wir unsere Algebra ganz abstrakt und behalten Quaternionenalgebra nur als Motivation im Hinterkopf:
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{K}^4$ und nennen die Standardbasis $\{1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Wir definieren eine Multiplikation auf der Basis und setzen diese bilinear fort. So erhalten wir eine Algebra $\mathbb{F}$. Auf dieser definieren wir eine Involution und zeigen, dass $\mathbb{F}$ eine Divisionsalgebra ist.

4.6.1. Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik ungleich zwei. Sei $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{K}^4$. Wir wählen drei Nichtquadrate $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}$ so, dass das Polynom $p(x_0, x_1, x_2, x_3) := x_0^2 - r_1 x_1^2 - r_2 x_2^2 - r_3 x_3^2$ keine nicht-trivialen Nullstellen in $\mathbb{K}^4$ hat.

Ferner definieren wir $\alpha_0 := 1$ und legen auf der Basis die folgende Verknüpfungstafel fest:

$\cdot$	1	α_1	α_2	α_3
1	1	α_1	α_2	α_3
α_1	α_1	r_1	α_3	$r_1\alpha_2$
α_2	α_2	$-\alpha_3$	r_2	$-r_2\alpha_1$
α_3	α_3	$-r_1\alpha_2$	$r_2\alpha_1$	r_3

Diese Multiplikation setzen wir bilinear auf $\mathbb{K}^4$ fort. Wir erhalten eine $\mathbb{K}-$Algebra $\mathbb{F}(r_1, r_2, r_3)$. Eine solche Algebra nennen wir *verallgemeinerte Quaternionenalgebra* über $\mathbb{K}$.

4.6.2. BEMERKUNG. (1) *Wenn wir $r_1 = r_2 = r_3 = -1$ setzen, erhalten wir die Verknüpfungstafel der Einheitengruppe der gewöhnlichen Quaternionen.*

(2) *Wie bei Algebren üblich identifizieren wir dabei $\mathbb{K}$ mit $1 \cdot \mathbb{K}$. Nach Definition gilt für $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$:*

$$\left(\sum_{i=0}^{3} x_i\alpha_i\right)\left(\sum_{j=0}^{3} y_j\alpha_j\right) = \sum_{i=0,j=0}^{3} (x_iy_j)(\alpha_i\alpha_j).$$

Damit ist bereits festgelegt, dass $\mathbb{K}$ im Zentrum und in den Nuklei N_l, N_m und N_r liegt.

(3) *Sei $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Dann existiert ein $\delta_{ij} \in \mathbb{K}$, so dass $\alpha_i\alpha_j = \delta_{ij}\alpha_k$ gilt. Dabei gilt $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$.*

Wir prüfen nun, welche der für eine Veroneseeinbettung benötigten Eigenschaften jede verallgemeinerte Quaternionenalgebra bereits erfüllt. Sei dazu für diesen Unterabschnitt $\mathbb{F} := \mathbb{F}(r_1, r_2, r_3)$ eine verallgemeinerte Quaternionenalgebra über $\mathbb{K}$ mit allen Bezeichnungen und Festlegungen aus Definition 4.6.1.

4.6.3. LEMMA. *Das Zentrum von $\mathbb{F}$ ist $\mathbb{K}$.*

Beweis: Das $\mathbb{K}$ im Zentrum liegt ist klar.
Sei nun umgekehrt $x = x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \in Z(\mathbb{F})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} r_1x_1 + x_0\alpha_1 + x_3\delta_{31}\alpha_2 + x_2\delta_{21}\alpha_3 &= x\alpha_1 \\ &= \alpha_1 x \\ &= r_1x_1 + x_0\alpha_1 + \delta_{13}x_3\alpha_2 + x_2\delta_{12}\alpha_3. \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen $-x_3 = x_3$ und $-x_2 = x_2$, also $x_2 = x_3 = 0$. Durch Multiplikation mit α_2 statt mit α_1 folgt dann auch $x_1 = -x_1$, also $x_1 = 0$, womit $x \in \mathbb{K}$ gezeigt ist. □

Wir definieren eine Abbildung $\kappa : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ auf der Basis $\{1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_3\}$ mit $\overline{\alpha_i} = -\alpha_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und $\overline{1} = 1$, und setzen κ linear auf ganz $\mathbb{F}$ fort. Wir schreiben $x^\kappa = \overline{x}$.

4.6.4. LEMMA. *Die Abbildung κ ist ein Antiautomorphismus mit Fixkörper $\mathbb{K}$.*

Beweis: Sei $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Dann gilt:
$\overline{\alpha_i\alpha_j} = \overline{\delta_{ij}\alpha_k} = \delta_{ji}\alpha_k = \alpha_j\alpha_i = (-\alpha_j)(-\alpha_i) = \overline{\alpha}_j\overline{\alpha}_i$,
womit klar ist, dass κ ein Antiautomorphismus ist. Der Fixkörper lässt sich bestimmen, indem wir κ als $\mathbb{K}-$lineare Abbildung auffassen und den Eigenraum zum Eigenwert 1 bestimmen. Dieser ist genau $\mathbb{K}$, denn es gilt für alle $(x_0,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{K}^4$ die Gleichung:

$$\overline{x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3} = x_0 - x_1\alpha_1 - x_2\alpha_2 - x_3\alpha_3.$$

□

4.6.5. Lemma. *Für $q = x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \in \mathbb{F}$ gilt $q\overline{q} = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$.*
Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2 + x_0\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i + \overline{\alpha_i}) + \sum_{i<j} x_ix_j(\alpha_i\overline{\alpha_j} + \alpha_j\overline{\alpha_i}) \\ &= x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2. \end{aligned}$$

□

4.6.6. Lemma. *Es gilt für alle $x \in \mathbb{F}$ die Gleichung $\bar{x}x = x\bar{x}$, und $\mathbb{F}$ ist eine Divisionsalgebra.*
Beweis: Der erste Teil des Lemmas folgt direkt aus Lemma 4.6.5. Für den zweiten Teil konstruieren wir das Inverse eines beliebigen $x \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$:
Nach Definition 4.6.1 hat das Polynom $p(x_0,x_1,x_2,x_3) := x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ keine nichttrivialen Nullstellen in $\mathbb{K}^4$. Nach Lemma 4.6.5 bedeutet dies, dass $x\overline{x} \neq 0$ gilt. Weil κ ein Antiautomorphismus mit Fixkörper $\mathbb{K}$ ist, gilt $x\overline{x} \in \mathbb{K}$. Daher existiert das inverse Element $(x\overline{x})^{-1} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Weil $\mathbb{K}$ im Zentrum und in den Nuklei N_l, N_m und N_r von $\mathbb{F}$ enthalten ist, gilt: $x(\overline{x}(x\overline{x})^{-1}) = (x\overline{x})(x\overline{x})^{-1} = 1 = (x\overline{x})^{-1}(x\overline{x}) = (\overline{x}(x\overline{x})^{-1})x$, womit $\overline{x}(x\overline{x})^{-1} = x^{-1}$ gezeigt ist. □

4.6.7. Lemma. *Wenn $r_3 = -r_1r_2$ gilt, dann ist $\mathbb{F}$ assoziativ.*
Beweis: Um Assoziativität zu zeigen, müssen wir alle 27 Gleichungen der Form
$(\alpha_i\alpha_j)\alpha_k = \alpha_i(\alpha_j\alpha_k)$ mit $\{i,j,k\} \subseteq \{1,2,3\}$ nachrechnen:
Für $i = j = k$ ist das trivial, bleiben noch 24 Fälle, was immer noch genug ist, um ein wenig abzukürzen. Daher wollen wir sie in Sechserpaketen behandeln. Für alle $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ gelten die Gleichungen $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$ und damit auch $\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i$. Damit und mit dem Wissen, dass $\mathbb{K}$ sowohl im Zenturm als auch im Links- und Rechtsnukleus enthalten ist, rechnen die je 6 Gleichungen umfassenden Fälle nach:
1. Fall $(i,j,k) = (i,j,i)$:

$$(\alpha_i\alpha_j)\alpha_i = \delta_{ij}\alpha_k\alpha_i = -\delta_{ji}(-\alpha_i\alpha_k) = \alpha_i(\delta_{ji}\alpha_k) = \alpha_i(\alpha_j\alpha_i).$$

2. Fall $(i,j,k) = (i,i,j)$:
Wenn wir in der Verknüpfungstafel die Zeilen betrachten, sehen wir, dass für alle $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ die Gleichung $(G1) : r_i = \delta_{ij}\delta_{ik}$ gilt. Daraus folgt:

$$(\alpha_i\alpha_i)\alpha_j = r_i\alpha_j = \delta_{ij}\delta_{ik}\alpha_j = \delta_{ij}\alpha_i\alpha_k = \alpha_i(\alpha_i\alpha_j).$$

3. Fall $(i,j,k) = (i,j,j)$:
Wenn wir in der Verknüpfungstafel die Spalten betrachten, sehen wir, dass für alle $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ die Gleichung $(G2) : r_j = \delta_{ij}\delta_{kj}$ gilt. Damit erledigen sich sechs weitere Gleichungen:

$$(\alpha_i\alpha_j)\alpha_j = \delta_{ij}\alpha_k\alpha_j = \delta_{ij}\delta_{kj}\alpha_i = r_j\alpha_i = \alpha_i(\alpha_j\alpha_j).$$

4. Fall $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$:
In diesem Fall gilt mit (G1) und (G2): $\delta_{ij}r_k = \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = r_i\delta_{jk}$. Daraus folgt:

$$(\alpha_i\alpha_j)\alpha_k = (\delta_{ij}\alpha_k)\alpha_k = \delta_{ij}r_k = r_i\delta_{jk} = \alpha_i\delta_{jk}\alpha_i = \alpha_i(\alpha_j\alpha_k).$$

Damit sind alle 24 Gleichungen gezeigt.

Die Assoziativität überträgt sich von den Basiselementen auf beliebige Elemente:

$$\left(\Big(\sum_{i=0}^{3} x_i\alpha_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{3} y_j\alpha_j\Big)\right)\Big(\sum_{k=0}^{3} z_k\alpha_k\Big) = \sum_{i=0,j=0,k=0}^{3} x_iy_jz_k(\alpha_i\alpha_j)\alpha_k$$

$$= \sum_{i=0,j=0,k=0}^{3} x_iy_jz_k\alpha_i(\alpha_j\alpha_k) = \Big(\sum_{i=0}^{3} x_i\alpha_i\Big)\left(\Big(\sum_{j=0}^{3} y_j\alpha_j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{3} z_k\alpha_k\Big)\right),$$

womit die Assoziativität von $\mathbb{F}$ bewiesen ist. □

4.6.8. Lemma. *Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}(r_1,r_2,r_3)$ eine verallgemeinerte Quaternionenalgebra im Sinne von Definition 4.6.1. Falls $\mathbb{F}$ assoziativ ist, liegen r_3 und $-r_1r_2$ in der selben Quadratklasse von $\mathbb{K}$.*

Beweis: Wir verwenden die Assoziativität von $\mathbb{F}$ und berechnen:
$r_3 = -\alpha_3\overline{\alpha_3} = -(\alpha_1\alpha_2)\overline{\alpha_1\alpha_2} = -\alpha_1(\alpha_2)\overline{\alpha_2})\overline{\alpha_1} = -r_1r_2.$ □

Die Ergebnisse dieses Unterabschnittes fassen wir in der folgenden Proposition zusammen:

4.6.9. Proposition. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik ungleich zwei und seien $r_1,r_2,r_3 \in \mathbb{K}\backslash\mathbb{K}^2$, so dass $x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ keine nicht-trivialen Nullstellen in $\mathbb{K}^4$ hat. Dann gilt:*

(1) *Die verallgemeinerte Quaternionenalgebra $\mathbb{F} := \mathbb{F}(r_1,r_2,r_3)$ über $\mathbb{K}$ ist eine Divisionsalgebra mit Zentrum $\mathbb{K}$.*
(2) *Es gibt einen involutorischen Antiautomorphismus $\kappa : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ mit Fixkörper $\mathbb{K}$, so dass für alle $q = x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \in \mathbb{F}$ gilt: $q\overline{q} = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$.*
(3) *$\mathbb{F}$ ist genau dann assoziativ, wenn r_3 und $-r_1r_2$ in derselben Quadratklasse von $\mathbb{K}$ liegen.*

Beweis:

(1) Nach Lemma 4.6.6 ist $\mathbb{F}$ eine Divisionsalgebra und nach Lemma 4.6.3 ist $\mathbb{K}$ das Zentrum von $\mathbb{F}$.
(2) Nach Lemma 4.6.4 gibt einen involutorischen Antiautomorphismus $\kappa : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ mit Fixkörper $\mathbb{K}$ und für alle $q = x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \in \mathbb{F}$ gilt nach Lemma 4.6.5 die Gleichung $q\overline{q} = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$.

(3) Nach Lemma 4.6.7 ist $\mathbb{F}$ assoziativ, wenn r_3 und $-r_1r_2$ in derselben Quadratklasse von $\mathbb{K}$ liegen. Wenn $\mathbb{F}$ assoziativ ist, liegen r_3 und $-r_1r_2$ nach Lemma 4.6.8 in derselben Quadratklasse von $\mathbb{K}$.

□

Wir stellen fest, dass $\mathbb{F}$ damit alle Voraussetzungen erfüllt, um eine von $\mathbb{F}$ induzierte Veroneseeinbettung zu konstruieren.

4.6.2. Die Veronesemannigfaltigkeit. Wir konstruieren wie in Abschnitt 3.3 eine Veronesemannigfaltigkeit als Menge der hermiteschen Rang 1-Matrizen in $\mathbb{F}(r_1, r_2, r_3)^{3\times 3}$. Wie in Lemma 3.3.6 ist die Gleichung eines Blockes dann $x_4x_5 = q\overline{q}$ mit $q = x_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$. Auf diese Weise können wir mit Proposition 4.6.9 das folgende Lemma beweisen:

4.6.10. LEMMA. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik ungleich zwei und mindestens 4 Elementen. Seien $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}\backslash\mathbb{K}^2$, so dass $x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ keine nicht-trivialen Nullstellen in $\mathbb{K}^4$ hat. Dann existiert genau dann eine von einer verallgemeinerte Quaternionenalgebra $\mathbb{F}(r_1, r_2, r_3)$ über $\mathbb{K}$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit, deren Blöcke zu einer Quadrik mit der Gleichung $x_4x_5 = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ äquivalent sind, wenn ein $s \in \mathbb{K}$ existiert, so dass $-r_1r_2 = s^2r_3$ gilt.*

Beweis: Falls ein $s \in \mathbb{K}$ existiert, so dass $-r_1r_2 = s^2r_3$ gilt, existiert nach Proposition 4.6.9 eine von der verallgemeinerte Quaternionenalgebra $\mathbb{F} := \mathbb{F}(r_1, r_2, r_3)$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{F}}$, deren Blöcke zur Quadrik mit der Gleichung $x_4x_5 = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ äquivalent sind.

Falls eine von einer verallgemeinerten Quaternionenalgebra $\mathbb{F} := \mathbb{F}(r_1, r_2, r_3)$ über $\mathbb{K}$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{F}}$ existiert, deren Blöcke zu einer Quadrik mit der Gleichung $x_4x_5 = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ äquivalent sind, ist diese ein $(n, k)-$Cap mit $k = 5$ und $n = 3 \cdot 5 - 1 = 14$. Nach Korollar 4.3.21 ist die Algebra $\mathbb{F}$ assoziativ und für alle $q = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}$ gilt die Gleichung $q\overline{q} = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$. Nach Lemma 4.6.8 liegen damit $-r_1r_2$ und r_3 in der selben Quadratklasse. □

Unser Ziel ist es ein Kriterium zu finden, welches zeigt, dass ein gegebenes $(n, 5)-$Cap zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist. Wir wollen ein solches Kriterium aus Lemma 4.6.10 ableiten. Das Problem mit der Voraussetzung, dass $-r_1r_2$ und r_3 in der selben Quadratklasse liegen, ist, dass die Zahlen r_1, r_2 und r_3 erst ausgerechnet werden müssen, und nicht von vornherein mit (X, Ξ) gegeben sind. Außerdem ist nicht sofort klar, dass r_1, r_2 und r_3 für jeden Block $L \in \mathcal{L}$ gleich sind. Daher formulieren wir den folgenden Satz:

4.6.11. SATZ. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei (X, Ξ) ein $(n, 5)$-Cap vom Index 2 im projektiven Raum $P_n\mathbb{K}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit höchstens zwei Quadratklassen, mindestens vier Elementen und Charakteristik ungleich zwei. Dann ist $n = 14$ und es gibt eine Veronesemannigfaltigkeit, die zu (X, Ξ) äquivalent ist.*

Beweis: Die Blöcke von (X,Ξ) sind nach Unterabschnitt 4.5.1 Quadriken, welche äquivalent zu der Quadrik mit Gleichung $x_4x_5 = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ für drei Nichtquadrate $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{K}$ sind. Da $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen hat, müssen die drei Nichtquadrate r_1, r_2 und r_3 natürlich in derselben Quadratklasse liegen, unabhängig vom betrachteten Block. Somit sind alle Blöcke von (X,Ξ) zueinander linear äquivalent. Weil r_1, r_2 und r_3 in der selben Quadratklasse liegen, ist der Quotient $r_1r_2^{-1}$ ein Quadrat. Damit ist auch -1 kein Quadrat, denn sonst wäre der Punkt $\left[0, \sqrt{-1}, \sqrt{r_1r_2^{-1}}, 0\right]$ eine nicht-triviale Nullstelle des Polynoms $x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$, im Widerspruch zu Lemma 4.5.3. Also sind alle Nichtquadrate Produkte von -1 und einem Quadrat, wir können also $r_1 = r_2 = r_3 = -1$ annehmen. Somit gilt $-r_1r_2 = -1 = r_3$, und nach Lemma 4.6.10 existiert eine von einer verallgemeinerten Quaternionenalgebra $\mathbb{F} := \mathbb{F}(r_1, r_2, r_3)$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{F}}$, deren Blöcke die Gleichung $x_4x_5 = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ haben, also zu den Blöcken von $(X,\mathcal{L})$ linear äquivalent sind. Nach Lemma 3.3.10 ist damit die Gruppe der linearen Äquivalenzen eines Blockes dreifach-transitiv. Somit ist nach Satz 4.4.9 das $(n,5)-$Cap (X,Ξ) äquivalent zur Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{F}}$. $\square$

4.7. Der Fall $k = 9$

Wir wollen die Überlegungen für den Fall $k = 5$ auf den Fall $k = 9$ anwenden. Daher setzen wir auch in diesem Abschnitt voraus, dass der Körper $\mathbb{K}$ eine von zwei verschiedene Charakteristik, mindestens 4 Elemente und nur zwei Quadratklassen hat.

4.7.1. Proposition. *Sei also L ein Block in einem $(n, 9)-$Cap über einem Körper $\mathbb{K}$ mit nur zwei Quadratklassen, mindestens 4 Elementen und einer von zwei verschiedener Charakteristik. Dann ist L eine Quadrik in $\langle L\rangle$ und hat bei passender Basiswahl die Gleichung: $x_8x_9 = \sum_{i=0}^{7} x_i^2$.*

Beweis: Nach Lemma 4.5.1 ist L eine Quadrik und wird durch eine symmetrische Bilinearform $(p, q) \mapsto xMy^T$ definiert. Im Folgenden nennen wir zwei Punkte $p, q \in \langle L\rangle$ zueinander orthogonal, wenn $pMq = 0$ ist. Für eine Teilmenge $Z \subseteq \langle L\rangle$ definieren wir $Z^\perp = \{p \in \langle L\rangle \mid \forall q \in Z : pMq = 0\}$. Für einen Punkt $x \in L$ gilt dann $x^\perp = T_x(L)$. Weil die Quadrik nicht ausgeartet ist, gilt ferner $\dim\langle Z\rangle + \dim(Z^\perp) = 8$. Wir wollen nun die Matrix M bestimmen. Seien $x, y \in L$ und seien A, B zwei zueinander und zu $\langle x, y\rangle$ orthogonale $3-$Räume. Solche existieren, da $\langle x, y\rangle^\perp$ ein $7-$Raum ist und einen $3-$Raum A enthält. Dann schneiden sich der $7-$Raum $\langle x, y\rangle^\perp$ und der $5-$Raum $A^\perp$ in einem $3-$Raum B.
Weil $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen hat, ist -1 wie im Beweis von Satz 4.6.11 kein Quadrat. Dann ist $B^\perp = \langle x, y, A\rangle$ ein $5-$Raum und nach Lemma 4.5.2 hat die Darstellungsmatrix von $L \cap B^\perp$ bei passender Basiswahl die Form

$$M_A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog hat $L \cap \langle x, y, B\rangle$ die Matrix M_B die gleiche Form. Damit ist M äquivalent zu einer Matrix der Form:

$$M' := \begin{pmatrix} I_{8\times 8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sei $I_{8\times 8}$ eine $8 \times 8-$Einheitsmatrix. Damit ist diese Proposition bewiesen. □

Mit dieser Erkenntnis können wir jetzt ein Hauptergebnis dieser Arbeit beweisen:

4.7.2. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit nur zwei Quadratklassen, mindestens 4 Elementen und einer von zwei verschiedenen Charakteristik. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n, 9)$-Cap vom Index 2 in $P_n\mathbb{K}$. Dann ist $n = 26$ und es gibt eine von einer Oktavenalgebra $\mathbb{O}$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{O}}$, die zu (X, Ξ) äquivalent ist.*

Beweis: Nach Lemma 4.2.5 gilt $n = 3 \cdot 9 - 1 = 26$.
Wir benötigen jetzt eine $\mathbb{K}-$Algebra $\mathbb{O}$, so dass die Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{O}}$ als Blöcke Quadriken mit einer Matrix äquivalent zu M' hat. Dazu müssen wir auf $\mathbb{O}$ eine Involution

definieren, so dass für $x \in \mathbb{O} = \mathbb{K}^8$ stets $x\overline{x} = \sum_{i=0}^{7} x_i^2$ gilt. So eine Algebra ist die Oktavenalgebra über $\mathbb{K}$, also $\mathbb{F}_3$ im Cayley-Dickson-Prozess. Dies ist hinlänglich bekannt, dennoch hier eine kurze Erklärung:
Der mit $\mathbb{K}$ beginnende Cayley-Dickson-Prozess liefet eine Körpererweiterung $F_1 = \mathbb{K}(\sqrt{-1})$. Der zweite Schritt ist eine assoziative Divisionsalgebra $\mathbb{F}_2$, wie sie in Unterabschnitt 4.6.1 konstruiert wurde. Nach Lemma 2.1.8 liefert der dritte Schritt eine alternative Divisionsalgebra $\mathbb{F}_3 = \mathbb{O}$, die Oktavenalgebra über $\mathbb{K}$.
Wie in Unterabschnitt 4.6.1 existieren $\alpha_i \in \mathbb{F}_2$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$, die mit $\alpha_0 := 1 \in \mathbb{K}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2$ als $\mathbb{K}-$Vektorraum bilden, und $\alpha_i^2 = -1$ sowie für alle $i \neq j$ die Gleichung $\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i$ erfüllen.
Diese erweitern wir zu einer Basis $\{\gamma_i \mid i \in \{0, \ldots, 7\}\}$ von $\mathbb{O}$:
$\gamma_i := (\alpha_i, 0)$ für $i < 4$ und $\gamma_i := (0, \alpha_{i-4})$ für $i \geq 4$. Stellen wir $x \in \mathbb{O}$ zu dieser Basis dar, gilt: $x\overline{x} = \sum_{i=0}^{7} x_i^2$.
Die hier konstruierte Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{O}}$ hat also Blöcke, die zu den Blöcken von (X, Ξ) linear äquivalent sind. Da $V_{\mathbb{O}}$ eine Veronesemannigfaltigkeit ist, ist die Gruppe der linearen Äquivalenzen von Blöcken von $V_{\mathbb{O}}$ nach Lemma 3.3.10 dreifach transitiv. Somit ist nach Satz 4.4.9 das $(n, k)-$Cap (X, Ξ) äquivalent zur Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{O}}$. □

4.7.1. Beweis von Satz 3.4.2. Wir können jetzt Satz 3.4.2 beweisen, den wir zur Bequemlichkeit des Lesers wiederholen:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik, der genau zwei Quadratklassen hat. Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein (n, k)-Cap vom Index 2 in $P_n\mathbb{K}$. Falls $(X, \mathcal{L})$ nicht-desarguessch ist, oder $k \in \{2, 3, 5, 9\}$ gilt, gelten $n = 3k + 1$, $k \leq 9$, und es gibt eine Veronesemannigfaltigkeit, die zu (X, Ξ) äquivalent ist.

Wir zeigen zuerst, dass eine eine zu $(X, \Xi, \mathcal{L})$ äquivalente Veronesemannigfaltigkeit existiert, falls $k \in \{2, 3, 5, 9\}$ gilt. Der Fall $k = 2$ ist in [**SM1**] und $k = 3$ in [**SM2**] bewiesen. Den Fall $k = 5$ haben wir in Satz 4.6.11 bewiesen, den Fall $k = 9$ in Satz 4.7.2.

Sei nun $(X, \mathcal{L})$ nicht-desarguessch. Dann ist $(X, \mathcal{L})$ nach Lemma 4.3.18 isomorph zur projektiven Ebene $P_2\mathbb{F}$ über einer Oktavenalgebra mit Zentrum $\mathbb{K}'$, welches nach Lemma 4.3.16 den Körper $\mathbb{K}$ enthält. Weil k endlich ist, ist $\mathbb{K}'$ eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{K}$ vom Grad $(k-1)/8$. Weil $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen hat, würde aus $k > 9$ folgen, dass $k = 17$ und $\mathbb{K}'$ algebraisch abgeschlossen ist. Das steht im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{F}$ eine Oktavenalgebra ist, somit ist $k = 9$ und nach Satz 4.7.2 existiert eine zu $(X, \Xi, \mathcal{L})$ äquivalente Veronesemannigfaltigkeit. □

4.7.3. Satz. *Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein kompaktes, zusammenhängendes $(n, k)-$Cap vom Index 2 im reellen projektivem Raum $P_n\mathbb{R}$. Dann ist $k \in \{2, 3, 5, 9\}$ und $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ist äquivalent zur Veroneseeinbettung einer reellen Cayley-Dickson-Algebra.*

Beweis: Nach Lemma 4.3.13 ist $(X, \mathcal{L})$ isomorph zu einer Moufangebene $P_2\mathbb{F}$. Nach [**Sa**, S. 367, Theorem 64.24] ist $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ und damit $k \in \{2, 3, 5, 9\}$. Da $\mathbb{R}$ genau zwei Quadratklassen hat, ist die Behauptung mit Satz 3.4.2 bewiesen. □

4.8. Index $i > 2$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit $(n,k)-$Caps vom Index $i > 2$, genau genommen mit guten $(n,k)-$Caps:

4.8.1. DEFINITION. Ein $(n,k)-$Cap $(X, \Xi, \mathcal{L})$ in $P_n\mathbb{K}$ heißt ein *gutes* $(n,k)-$*Cap*, wenn alle zweidimensionalen Unterräume $(E, \mathcal{L}(E))$ des projektiven Raumes $(X, \mathcal{L})$ äquivalent zu einer desarguesschen Veronesemannigfaltigkeit in $P_{3k-1}\mathbb{K}$ sind.

Wir haben mit Satz 4.6.11 gezeigt, dass jedes $(n,k)-$Cap gut ist, falls $k = 5$ gilt und $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen hat. Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass jedes gute $(n,k)-$Cap äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit in $P_n\mathbb{K}$ oder dem Bild einer Veronesemannigfaltigkeit in $P_n\mathbb{K}$ unter einer Zentralprojektion ist. Dieses Ziel erreichen wir in Satz 4.8.15, womit dann auch Satz 3.4.3 bewiesen ist.
Auch in diesem Abschnitt sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik. Die Voraussetzung, dass $\mathbb{K}$ nur zwei Quadratklassen hat, benötigen wir nur, um zu zeigen, dass ein $(n(X),k)-$Cap gut ist, nicht um zu zeigen dass gute $(n(X),k)-$Caps äquivalent zu Veronesemannigfaltigkeiten sind.
Mit $(X, \Xi, \mathcal{L})$ bezeichnen wir stets ein gutes $(n(X),k)-$Cap in $P_n\mathbb{K}$. Für Untercaps $(Y, \Xi(Y))$ mit $Y \subseteq X$ und $\Xi(Y) \subseteq \Xi$ legen wir folgende Konventionen fest:
Mit $n(Y)$ bezeichnen wir die Dimension von $\langle Y \rangle$, mit $\mathcal{L}(Y)$ die Menge der Blöcke, die in Y enthalten sind und für einen Punkt $y \in Y$ mit $T_y(Y)$ den Aufspann $\langle \bigcup_{L \in \mathcal{L}(Y)_y} T_y(L) \rangle$. Kurz: Wir hängen an die Bezeichnung von Objekten im $(n,k)-$Cap (X, Ξ) ein Y in Klammern an, um das entprechende Objekt im $(n(Y),k)-$Cap $(Y, \Xi(Y))$ zu bezeichnen.
Da es in der Geometrie $(X, \mathcal{L})$ auch Unterräume höherer Dimension gibt, wird es begrifflich schwieriger, zwischen den geometrischen Strukturen der Räume $P_n\mathbb{K}$ und $(X, \mathcal{L})$ zu unterscheiden. Da wir nicht für jede Dimension einen neuen Begriff einführen wollen, werden wir, wenn wir Unterräume von $(X, \mathcal{L})$ meinen, das jedes Mal erwähnen. Die spitzen Klammern $\langle \rangle$ bezeichnen weiterhin nur das Erzeugnis in $P_n\mathbb{K}$, den Aufspann in $(X, \mathcal{L})$ bezeichnen wir mit $[\![\ ]\!]$.
Anders als bei Index 2 ist es im allgemeinen Fall bedeutsam, zwischen dem Aufspann der Vereinigung aller Tangentialräume $T(x) = \langle \bigcup_{L \in \mathcal{L}_x} T_x(L) \rangle$ und den in Axiom (C2) mit einem $L \in \mathcal{L} \backslash \mathcal{L}_x$ konstruierten Tangentialräumen $T(x, L) := T(x, \langle L \rangle) = \langle \bigcup_{y \in L} T_x(L(x,y)) \rangle$ zu unterscheiden.
Dieser Abschnitt folgt in Struktur und den Grundideen Kapitel 5 aus [**CTM**]. Dort sind die meisten Rechnungen einfacher, weil $k = 3$ vorausgesetzt wird. Eine weitere Voraussetzung in [**CTM**] ist, dass $\mathbb{K}$ endlich ist. Das wirkt sich insofern aus, dass Isomorphie zwischen zwei Caps automatisch erfüllt ist, und nur noch von Isomorphie auf Äquivalenz geschlossen werden muss. Dieses Problem löst jedoch die folgende einfache Überlegung:

4.8.2. LEMMA. *Jedes gute $(n(X), k)-$Cap $(X, \Xi, \mathcal{L})$ mit Index $i > 2$ ist zu einer Veronesemannigfaltigkeit isomorph.*

Beweis: Da $(X, \mathcal{L})$ nach Proposition 4.2.2 ein projektiver Raum ist, und $\dim(X, \mathcal{L}) = i > 2$ gilt, ist $(X, \mathcal{L})$ desarguessch. Somit gibt es einen Schiefkörper $\mathbb{F}$, so dass $(X, \mathcal{L})$ zu $P_i\mathbb{F}$ isomorph ist.
Da alle zweidimensionalen Unterräume von $(X, \mathcal{L})$ äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit in $P_{3k-1}\mathbb{K}$ sind, gibt es eine von $\mathbb{F}$ induzierte Veronesemannigfaltigkeit über $\mathbb{K}$, also auch eine vom Index i. Diese hat dann ebenfalls als projektiver Raum den Isomorphietyp $P_i\mathbb{F}$. □

4.8.3. LEMMA. *Sei Y ein $r-$dimensionaler Unterraum des projektiven Raumes $(X, \mathcal{L})$. Dann ist $(Y, \Xi(Y)) = \{\xi \in \Xi \mid \xi \cap Y = \xi \cap X\})$ ein $(n(Y), k(Y)) -$ Cap vom Index r, mit $n(Y) = \dim\langle Y\rangle$ und $n(k) = k$.*

Beweis: Alle Axiome der Definition eines $(n, k)-$Caps (Definition 3.1.1) übertragen sich problemlos. Wegen $\Xi(Y) \subseteq \Xi$ gilt offensichtlich auch $k(Y) = k$. □

4.8.4. LEMMA. *Für alle $x \in X$ ist $T^\circ(x) := \bigcup_{L \in \mathcal{L}_x} T_x(L)$ ein Unterraum. Es gelten $T^\circ(x) = T(x)$ und $\dim T(x) = (k-1)i$.*

Beweis: Wir verwenden vollständige Induktion nach i.
Falls $i = 2$ gilt, sei $\xi \in \Xi$ mit $x \notin \xi$, dann ist $T(x) = T(\xi, x)$. Da (X, Ξ) ein gutes $(n, k)-$Cap vom Index 2 ist, ist (X, Ξ) eine desarguessche Veronesemannigfaltigkeit, und es gilt dann nach Bemerkung 3.3.11 $T(x) = T(\xi, x) = T^\circ(x)$. Nach Axiom (C3) gilt auch $\dim T(x) = 2k - 2$. Damit ist der Induktionsanfang geschafft.

Sei jetzt also $i > 2$. Dann wählen wir eine Hyperebene mit Punktmenge $Y \subset X$ in $(X, \mathcal{L})$ und einen Punkt $x \in Y$. Dann ist nach Lemma 4.8.3 das Paar $(Y, \{\xi \in \Xi \mid \xi \cap X \subseteq Y\})$ ein $(n(Y), k)-$Cap vom Index $i - 1$ und nach Induktionsvoraussetzung ist
$T_x(Y) = \bigcup_{y \in Y \setminus \{x\}} T_x(L(x, y))$ ein $(k-1)(i-1)-$Raum.
Seien nun $z \in X \setminus Y$ und $u \in \langle L(x, z)\rangle \cap T_x(Y)$. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $y \in Y$ so, dass $u \in T_x(L(x, y))$ ist. Nach Axiom (C2) gilt dann $u = \langle L(x, z)\rangle \cap \langle L(x, y)\rangle = x$. Damit ist die Gleichung $\langle L(x, z)\rangle \cap T_x(Y) = \{x\}$ bewiesen und es gilt

$$\dim\langle T_x(Y), T_x(L(x, z))\rangle = (k-1)(i-1) + k - 1 = (k-1)i.$$

Wir zeigen noch, dass $T^\circ(x) = \langle T_x(Y), T_x(L(x, z))\rangle$ gilt. Dazu zeigen wir zuerst die Inklusion $T^\circ(x) \subseteq \langle T_x(Y), T_x(L(x, z))\rangle$: Wir wählen einen Block $M \in \mathcal{L}_x \setminus \mathcal{L}_x(Y)$ und zeigen, dass $T_x(M) \subseteq \langle T_x(Y), T_x(L(x, z))\rangle$ gilt. Die Aussage ist trivial, wenn $M = L(x, z)$ gilt, darum nehmen wir $z \notin M$ an. Sei $w \in M \setminus \{x\}$. Da Y eine Hyperebene in $(X, \mathcal{L})$ ist, schneiden sich $L(z, w)$ und Y in genau einem Punkt y. Wegen $z \notin M$ sind M und $L(z, w)$ verschieden, schneiden sich somit nur in genau dem Punkt $w \neq x$. Daher gilt $x \notin L(z, w)$ und somit $x \neq y$. Damit gilt
$T_x(M) \subseteq T(x, L(z, w)) = T(x, L(z, y)) = \langle T_x(L(x, z)), T_x(L(x, y))\rangle \subseteq \langle T_x(Y), T_x(L(x, z))\rangle$.
Jetzt zeigen wir noch, dass umgekehrt auch $\langle T_x(Y), T_x(L(x, z))\rangle \subseteq T^\circ(x)$ gilt. Sei dazu $v \in \langle T_x(Y), T_x(L(x, z))\rangle \setminus T_x(Y) \cup T_x(L(x, z))$. Dann existieren Punkte $a \in T_x(Y)$ und $b \in T_x(L(x, z))$, so dass v in dem $2-$Raum $\langle a, b, x\rangle$ liegt. Nach unserer Induktionsvoraussetzung gibt es einen Punkt $y \in Y$ so, dass $\langle a, x\rangle \subseteq T_x(L(x, y))$ gilt.

Dann gilt: $v \in \langle a, b, x\rangle \subseteq \langle T_x(L(x,z)), T_x(L(x,y))\rangle = T(x, L(y,z))$. Da $T(x, L(y,z))$ der Tangentialraum von x in einem $(n,k)-$Cap vom Index zwei ist, gilt nach Induktionsanfang $T(x,L) = \bigcup_{t\in L} T_x(L(x,t))$, und es existiert ein Punkt $z' \in L(x,y)$, so dass $v \in T_x(L(x,z')) \subseteq T^\circ(x)$ gilt. Damit ist unsere Behauptung $T^\circ(x) = T(x)$ bewiesen. $\square$

4.8.5. Lemma. *Sei Y eine Hyperebene des projektiven Raumes $(X, \mathcal{L})$ und sei $x \in X \backslash Y$. Dann gilt $\langle Y, T(x)\rangle = \langle X\rangle$.*

Beweis: Wir zeigen $\langle X\rangle = \langle Y, T(x)\rangle$ indem wir $X \subseteq \langle Y, T(x)\rangle$ zeigen. Sei dazu $z \in X\backslash Y$. Weil Y eine Hyperebene in X ist, gibt es genau einen Schnittpunkt $y = L(x,z) \cap Y$. Dann gilt $z \in \langle L(x,y)\rangle = \langle T_x(L(x,y)), y\rangle \subseteq \langle Y, T(x)\rangle$, also auch $X \subseteq \langle Y, T(x)\rangle$ und somit $\langle X\rangle = \langle Y, T(x)\rangle$. $\square$

Wir haben in Abschnitt 3.3 gesehen, dass der Aufspann einer von einer $(k-1)$ dimensionalen Algebra induzierten Veronesemannigfaltigkeit vom Index i immer Dimension

$$N(i,k) = \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i$$

hat. Das gilt für $(n,k)-$Caps im allgemeinen nicht, aber wie wir im folgenden Lemma sehen werden, fungiert die Zahl $N(i,k)$ als Obergrenze für $n(X)$.

4.8.6. Lemma. *Es gilt $n(X) \le N(i,k) = \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i$.*

Beweis: Wir führen eine vollständige Induktion nach i durch. Im Fall $i = 2$ ist nach Lemma 4.2.5(3) bereits $n(X) = 3k-1 = N(2,k)$ gezeigt.
Sei also $i > 2$ und sei Y eine Hyperebene von $(X, \mathcal{L})$. Dann ist Y Punktmenge eines $(n(Y), k)-$Caps vom Index $i-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt bereits $n(Y) \le N(i-1,k)$. Falls $X \subseteq \langle Y\rangle$, ist $\langle X\rangle = \langle Y\rangle$ und somit $n(X) = n(Y) \le N(i-1,k) \le N(i,k)$.
Nehmen wir also an, es existiert ein $x \in X\backslash\langle Y\rangle$. Nach Lemma 4.8.5 gilt dann $\langle X\rangle = \langle Y, T(x)\rangle$.
Mit Lemma 4.8.4 folgt:

$$\begin{aligned} n(X) &\le n(Y) + (k-1)i + 1 \\ &\le N(i-1,k) + (k-1)i + 1 \\ &\le \tfrac{1}{2}(k-1)(i-1)^2 + \tfrac{1}{2}(k+1)(i-1) + (k-1)i + 1 \\ &= \tfrac{1}{2}(k-1)i^2 + \tfrac{1}{2}(k+1)i = N(i,k). \end{aligned}$$

$\square$

Da wir hier mit beliebigen i und k rechnen, können Dimensionsargumente unübersichtlich aussehen. Daher werden wir ein paar davon aus den eigentlichen Beweisen fernhalten und in folgendem Lemma beweisen:

4.8.7. Lemma. *Seien $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n(X), k)-$Cap mit Index $i > 2$, und es gelte $n(X) = N(i,k)$. Seien X_1 und X_2 Hyperebenen des projektiven Raumes $(X, \mathcal{L})$. Dann gelten:*

(1) *Für alle $x \in X\backslash X_1$ gilt $\langle X_1\rangle \cap T(x) = \emptyset$.*
(2) $\dim\langle X_1\rangle = \dim\langle X_2\rangle = N(i-1,k)$.
(3) *Sei L ein Block, so dass $L \cap X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Dann gilt $P_n\mathbb{K} = \langle L, X_1, X_2\rangle$.*

(4) $d := \dim(\langle X_1\rangle \cap \langle X_2\rangle) = N(i-2,k)$.
(5) $\langle X_1, X_2\rangle \cap X = X_1 \cup X_2$.

Beweis:

(1) Sei $d = \dim T(x) \cap \langle X_1\rangle$. Nach Lemma 4.8.5 gilt $\langle X\rangle = \langle X_1, T(x)\rangle$, und nach Lemma 4.8.4 gilt $\dim T(x) = (k-1)i$. Damit erschließen wir:
$\frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i = n(X)$
$= n(X_1) + (k-1)i - d$
$\leq N(i-1,k) + (k-1)i - d$
$= \frac{1}{2}(k-1)(i-1)^2 + \frac{1}{2}(k+1)(i-1) + (k-1)i - d.$
Durch Umformen erhalten wir $d \leq -1$, also gilt $\langle X_1\rangle \cap T(x) = \emptyset$.
(2) Nach Lemma 4.8.6 gilt $n(X_1) := \dim\langle X_1\rangle \leq N(i-1,k)$. Sei $x \in X\backslash X_1$. Nach Lemma 4.8.5 gilt $\langle X\rangle = \langle T(x), X_1\rangle$, und weil nach (1) $X_1 \cap T(x) = \emptyset$ ist, gilt:
$n(X_1) = n(X) - (k-1)i - 1 = \frac{1}{2}(k-1)(i-1)^2 + \frac{1}{2}(k+1)(i-1) = N(i-1,k)$. Das Gleiche gilt natürlich auch für X_2 und damit ist (2) gezeigt.
(3) Sei $x_1 = L \cap X_1$, dann ist nach (1) und Lemma 4.8.4 aus Dimensionsgründen $T(x_1) = \langle T_{x_1}(L), T_{x_1}(X_1)\rangle$, und darum gilt: $\langle L, X_1, X_2\rangle \supseteq \langle T(x_1), X_2\rangle = P_n\mathbb{K}$.
(4) Wenn wir (2) auf $X_{12} = X_1 \cap X_2$ als Hyperebene von X_1 anwenden, erhalten wir: $d \geq n(X_{12}) = N(i-2,k)$.
Nach (3) gilt:
$n(X) = 2n(X_1) - d + k - \dim\langle L\rangle \cap \langle X_1, X_2\rangle \geq 2n(X_1) - d + k - 1$, also
$d \leq 2n(X_1) - n(X) + k - 1$
$= (k-1)(i-1)^2 + (k+1)(i-1) - \frac{1}{2}(k-1)i^2 - \frac{1}{2}(k+1)i + k - 1$
$= (k-1)(i^2 - 2i + 1 - \frac{1}{2}i^2) + (k+1)(\frac{1}{2}i - 1) + k - 1$
$= (k-1)\left(\frac{1}{2}(i-2)^2 - 1\right) + \frac{1}{2}(k+1)(i-2) + (k-1)$
$= \frac{1}{2}(k-1)(i-2)^2 + \frac{1}{2}(k+1)(i-2)$
$= N(i-2,k)$.
(5) Aus (4) folgt, dass es in $\langle X_1, X_2\rangle \backslash (X_1 \cup X_2)$ keinen weiteren Punkt aus X geben kann, denn sonst gäbe es einen Block L, der $\langle X_1, X_2\rangle$ in einem $2-$Raum schneidet und keinen Punkt aus X_{12} enthält. Dann gälte nach (3):
$n(X) = \dim\langle L, X_1, X_2\rangle$
$= n(X_1) + n(X_2) - n(X_{12}) + k - 2$
$= (k-1)(i-1)^2 + (k+1)(i-1) - \frac{1}{2}(k-1)(i-2)^2 - \frac{1}{2}(k+1)(i-2) + k - 2$
$= \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \left(-2(k-1) + (k+1) + 2(k-1) - \frac{1}{2}(k+1)\right) i - 1$
$= \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i - 1$
$= n(X) - 1 \neq n(X)$, was einen Widerspruch darstellt. $\square$

4.8.8. SATZ. *Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n,k)-$Cap mit Index $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$ und gelte $n = N(i,k)$. Dann ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit.*

Beweis: Wir verwenden wieder eine vollständige Induktion über i:
Für $i = 2$ ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent, weil $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n,k)-$Cap ist.
Sei nun $i > 2$: Seien X_1, X_2 Hyperebenen in $(X, \mathcal{L})$. Nach Lemma 4.8.7(2) ist $\dim\langle X_1\rangle = \dim\langle X_2\rangle = N(i-1,k)$ und es gibt nach Induktionsvoraussetzung zwei Kollineationen α_1, α_2

von $\langle X_1 \rangle$ und $\langle X_2 \rangle$ auf geeignete Unterräume einer Veronesemannigfaltigkeit V vom Index i. Sei $X_{12} := X_1 \cap X_2$, dann gibt es einen linearen Isomorphismus von V als desarguesschen projektiven Raum, der $X_{12}^{\alpha_1}$ auf $X_{12}^{\alpha_2}$ abbildet. Nach Lemma 3.3.4 lässt sich dieser zu einer Äquivalenz von V fortsetzen. Nach Lemma 4.8.7(4) gilt $\langle X_{12} \rangle = \langle X_1 \rangle \cap \langle X_2 \rangle$. Wir können also voraussetzen, dass α_1 und α_2 auf dem Schnitt $\langle X_1 \rangle \cap \langle X_2 \rangle = \langle X_{12} \rangle$ übereinstimmen, und sich daher zu einer Kollineation $\alpha' : \langle X_1, X_2 \rangle \to \langle X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2} \rangle$ fortsetzen lassen. Nach Lemma 4.8.7(5) gilt $\langle X_1, X_2 \rangle \cap X = X_1 \cup X_2$. Daher lässt sich die Einschränkung von α' auf X zu einem Isomorphismus $\beta : (X, \mathcal{L}) \to V$ fortsetzen.
Sei L_0 ein Block mit $\langle L_0 \rangle \cap \langle X_1 \rangle \cap \langle X_2 \rangle = \emptyset$. Dann gilt nach Lemma 4.8.7(3) die Gleichung $P_n\mathbb{K} = \langle L_0, X_1, X_2 \rangle$. Sei nun α_0 die Fortsetzung von β auf $\langle L_0 \rangle$. Seien $L_1 \in \mathcal{L}(X_1)$, $L_2 \in \mathcal{L}(X_2)$, so dass die drei Blöcke L_0, L_1, L_2 ein nicht ausgeartetes Dreieck bilden. Da sich β auf den Aufspannen der drei Blöcke L_0, L_1, L_2 je zu einer Kollineation α_0, $\alpha'|_{L_1}$, $\alpha'|_{L_2}$ fortsetzen lässt, lässt sich β nach Korollar 4.4.6 zu einer Äquivalenz von $[\![L_0, L_1, L_2]\!]$ fortsetzen, die die drei Kollineationen α_0, $\alpha_1|_{L_1}$, $\alpha_2|_{L_2}$ fortsetzt. Insbesondere stimmen α' und α_0 auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche, der Geraden $\langle L_0 \cap X_1, L \cap X_2 \rangle$, überein, und lassen sich daher zu einer Kollineation $\alpha : P_n\mathbb{K} \to P_n\mathbb{K}$ fortsetzen, die auf $X_1 \cup X_2 \cup L_0$ mit β übereinstimmt.
Sei nun $x \in X \backslash (X_1 \cup X_2 \cup L_0)$ beliebig. Dann ist die Ebene $E = [\![L_0, x]\!]$ ein $(n, k)-$Cap vom Index 2. Weil α auf den drei Blöcken $E \cap X_1$, $E \cap X_2$ und L_0 mit β übereinstimmt, gilt nach Korollar 4.4.3, dass α auf $x \in E$ und damit auf ganz X mit β übereinstimmt und eine Äquivalenz von $(X, \Xi, \mathcal{L})$ auf eine Veronesemannigfaltigkeit ist. □

In den folgenden Beweisen ist es von zentraler Bedeutung, dass für einige Unterräume $(Y, \mathcal{L}(Y))$ in $(X, \mathcal{L})$ die Gleichung $X \cap \langle Y \rangle = Y$ gilt. Darum wollen wir solchen Unterräumen einen Namen geben:

4.8.9. Definition. Unterräume von $(X, \mathcal{L})$, die $X \cap \langle Y \rangle = Y$ erfüllen nennen wir *voll.*

4.8.10. Lemma. *Sei E eine Ebene im projektiven Raum $(X, \mathcal{L})$ eines guten $(n(X), k)-$Caps. Dann ist E voll.*

Beweis: Angenommen, es gibt ein $x \in (X \backslash E) \cap \langle Y \rangle$. Da E die Punktmenge eines guten $(3k-1, k)-$Caps ist, ist $(E, \Xi(E))$ eine Veronesemannigfaltigkeit, daher existieren nach Lemma 3.3.12 drei Punkte $y_1, y_2, y_3 \in E$ mit $x \in \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$. Weil X ein Cap ist und $x \notin E$ gilt, ist $y_3 \notin \langle y_1, y_2 \rangle$. Dann existiert ein Schnittpunkt $z = \langle y_1, y_2 \rangle \cap \langle x, y_3 \rangle$, für den nach Axiom (C2) gilt: $z = \langle L(y_1, y_2) \rangle \cap \langle L(x, y_3) \rangle \subseteq X$. Somit enhält X die drei kollinearen Punkte x, y_3, z. Wegen $x \notin E$ und $y_3 \notin \langle y_1, y_2 \rangle$ sind die drei Punkte paarweise verschieden und X ist kein Cap, ein Widerspruch. Also ist $(X \backslash E) \cap \langle Y \rangle = \emptyset$, und somit gilt $x \cap \langle E \rangle = E$. □

4.8.11. Proposition. *Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n(X), k)-$Cap mit Index* 3. *Dann ist $n(X) = N(3, k) = 6k - 3$ und $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ist äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit.*

Beweis: Nach Lemma 4.8.6 ist $n(X) \leq N(3, k) = 6k-3$. Nehmen wir an, es gilt $n(X) < 6k-3$. Sei Y eine Ebene im dreidimensionalen projektiven Raum $(X, \mathcal{L})$. Dann ist Y Punktmenge einer Veronesemannigfaltigkeit und es gilt $n(Y) = \dim\langle Y \rangle = 3k - 1$. Für $x \in X \backslash Y$ gilt nach

Lemma 4.8.10 $x \notin \langle Y\rangle$. Nach Lemma 4.8.5 gilt außerdem $\langle X\rangle = \langle Y, T(x)\rangle$ und daher gilt wegen Lemma 4.8.4 auch $6k-3 > n(X) = 3k-1+3(k-1)-\dim(\langle Y\rangle \cap T(x))$, also ist $\langle Y\rangle \cap T(x) \neq \emptyset$. Sei nun $a \in \langle Y\rangle \cap T(x)$. Nach Lemma 4.8.4 gibt es einen Block $L \in \mathcal{L}\backslash\mathcal{L}(Y)$ mit $a \in T_x(L)$. Sei $y := L \cap Y$. Dann gilt $\langle a, y\rangle \cap X \subseteq \langle Y\rangle \cap L = \{y\}$ und somit ist $a \in T(y)$. Für alle $M \in \mathcal{L}_y(Y)$ gilt nach Axiom (C2): $\langle L\rangle \cap \langle M\rangle = y \neq a$. Daher kann a nicht in $T_y(Y) = \bigcup_{M\in\mathcal{L}_y(Y)} T_y(M)$ enthalten sein, und somit ist $\dim(T(y) \cap \langle Y\rangle) > \dim T_y(Y) = 2k-2$. Sei nun $\xi \in \Xi(Y)$ mit $y \notin \xi$. Dann kann aus Dimensionsgründen $T(y) \cap \xi$ nicht leer sein, ein Widerspruch zu Lemma 4.2.5. Also muss $n(X) = 6k-3$ gelten und nach Satz 4.8.8 ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit. □

4.8.12. Lemma. *Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n(X), k)-$Cap mit Index i. Wenn $n(X) < N(i, k)$ gilt, existiert eine Hyperebene Y von $(X, \mathcal{L})$, die nicht voll ist.*

Beweis: Wir beweisen dieses Lemma mit Induktion über den Index i: Für $i = 2$ und $i = 3$ gilt die Behauptung, da in diesen Fällen immer $n(X) = N(i, k)$ gilt. Sei also $i \geq 4$ und sei Y eine Hyperebene von $(X, \mathcal{L})$. Dann ist Y ein $(n(Y), k)-$Cap vom Index $i-1$. Wenn Y nicht voll ist, ist unsere Behauptung bewiesen, also nehmen wir an, Y sei voll.
Nehmen wir an, $\dim\langle Y\rangle < N(i-1, k)$, dann hat Y nach Induktionsvoraussetzung eine Hyperebene Z, die nicht voll ist. Das heißt, es gibt einen Punkt $y \in \langle Z\rangle \cap Y\backslash Z$. Sei $x \in X\backslash\langle Y\rangle$, dann ist die Hyperebene $Y' := [\![Z, x]\!]$ von $Y \not\ni x$ verschieden, also ist $Y \cap Y' = Z$. Somit ist insbesondere $y \notin Y'$ und Y' ist nicht voll, denn es gilt $y \in \langle Y'\rangle \cap X\backslash Y'$.

Nehmen wir also an, es gilt $\dim\langle Y\rangle = N(i-1, k)$. Dann gilt für alle $x \in X\backslash Y$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\dim T(x) \cap \langle Y\rangle &= (k-1)i + N(i-1, k) - n(X)\\
&= \tfrac{1}{2}(k-1)(i^2+1) + \tfrac{1}{2}(k+1)(i-1) - n(X)\\
&= \tfrac{1}{2}(k-1)i^2 + \tfrac{1}{2}(k-1) + \tfrac{1}{2}(k+1)(i-1) - n(X)\\
&= \tfrac{1}{2}(k-1)i^2 + \tfrac{1}{2}(k+1)i - 1 - n(X)\\
&= N(i, k) - 1 - n(X) > -1.
\end{aligned}$$

Daher existiert ein Punkt $a \in T(x) \cap \langle Y\rangle$. Nach Lemma 4.8.4 existiert ein $y \in Y$ mit $a \in T_x(L(x, y))$. Wie im Beweis von Lemma 4.8.11 gilt $X \cap \langle a, y\rangle \subseteq \langle Y\rangle \cap L(x, y) = \{y\}$ und somit $a \in T_y(L(x, y))$. Damit ist a in $T(y) \cap \langle Y\rangle$, aber nicht in $T_y(Y)$ enthalten. Daher gilt

$$(*) \qquad \dim(T(y) \cap \langle Y\rangle) > \dim T_y(Y) = (k-1)(i-1).$$

Wir wählen eine Hyperebene Z des projektiven Raumes $(Y, \mathcal{L}(Y))$, die den Punkt y nicht enthält, dann gilt nach Lemma 4.8.5 die Gleichung $\langle Y\rangle = \langle Z, T_y(Y)\rangle$. Daraus folgt mit $\dim T_y(Y) = (k-1)(i-1)$, $n(Z) \leq N(i-2, k)$ und der Definition $d := \dim(\langle Z\rangle \cap \langle T_y(Y)\rangle)$ die Ungleichung

$$(**) \qquad N(i-2, k) + (k-1)(i-1) - d \geq n(Z) + (k-1)(i-1) - d = n(Y) = N(i-1, k).$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhalten wir $d \leq -1$, also $d = -1$. Nach Lemma 4.8.7(2) gilt $n(Z) = N(i-2, k)$. Mit $(*)$ und $(**)$ folgt daraus $T(y) \cap \langle Z\rangle \neq \emptyset$. Damit existiert ein Punkt $b \in T(y) \cap \langle Z\rangle$ und wegen $T_y(Y) \cap \langle Z\rangle = \emptyset$, existiert ein $w \in X\backslash Y$ mit $b \in \langle L(y, w)\rangle$ und es gilt $L(y, w) \cap Y = y \notin Z$. Wegen $n(Z) = N(i-2, k)$ erfüllt Z die Voraussetzung für Satz 4.8.8 und ist äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit. Somit gibt es nach Lemma 3.3.13 zwei Punkte $x_1, x_2 \in L(y, w)$ mit $b \in \langle x_1, x_2\rangle$. Nach Lemma 3.3.12 existieren

Punkte $z_1, \dots, z_{i-1} \in Z$, so dass b im Aufspann $\langle z_1, \dots, z_{i-1}\rangle$ enthalten ist. Daraus folgt, dass b im Schnitt $\langle x_1, x_2\rangle \cap \langle z_1, \dots, z_{i-1}\rangle$ liegt und somit $x_2 \in \langle x_1, z_1, \dots, z_{i-1}\rangle$ gilt. Der von $z_1, \dots, z_{i-1}$ aufgespannte Unterraum von $(X, \mathcal{L})$ ist in Z enthalten. Wegen $L(x_1, x_2) = L(y, w)$ und $L(y, w) \cap Z = \emptyset$ gilt: $[\![x_1, x_2, Z]\!] = X = [\![y, w, Z]\!]$. Daher ist $Y' := [\![x_1, Z]\!]$ eine Hyperebene in $(X, \mathcal{L})$, die den Punkt x_2 nicht enthält. Wegen $x_2 \in \langle x_1, z_1, \dots, z_{i-1}\rangle \subseteq \langle Z, x_1\rangle \subseteq \langle Y'\rangle$ ist die Hyperebene Y' nicht voll. □

Als nächstes konstruieren wir eine Teilmenge, die der hermiteschen Varietät in [**CTM**, chapter 6] entspricht. Diese wird im Beweis von Lemma 4.8.14 von entscheidender Bedeutung sein.

4.8.13. Lemma. *Seien $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n(X), k)-$Cap mit Index i, Y_0 eine nicht volle Hyperebene von $(X, \Xi, \mathcal{L})$ und $x \in X \cap \langle Y_0\rangle \backslash Y_0$. Dann existiert eine Teilmenge $\mathcal{H} \subset X$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(1) *Es existiert eine Menge $\mathcal{Y}$ von Hyperebenen von $(X, \mathcal{L})$, so dass $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{Y}$ gilt und $Y := \bigcap \mathcal{Y}$ als Unterraum von $(X, \mathcal{L})$ Dimension $i - 2$ hat.*
(2) *Jeder x enthaltende Block, der Y nicht schneidet, schneidet $\mathcal{H}$ in einem Ovoid der Dimension $k - 2$. Jeder x enthaltende Block, der Y schneidet, schneidet $\mathcal{H}$ in genau einem Punkt.*
(3) *Es gilt $\langle \mathcal{H}\rangle = \langle X\rangle$.*
(4) *Für jeden x enthaltenden 3-Raum S von $(X, \mathcal{L})$, der zusammen mit Y den projektiven Raum $(X, \mathcal{L})$ aufspannt gilt:* $\dim\langle \mathcal{H} \cap S\rangle = 6k - 4$ *und* $\langle S\rangle = \langle S \cap \mathcal{H}, x\rangle$.

Beweis: Sei Y eine Hyperebene in Y_0 und sei $L_0 \in \mathcal{L}_x$ ein Block, der x enthält und Y nicht schneidet. Sei O ein Teilovoid von L_0 mit $\dim\langle O\rangle = k - 1$, das nicht x aber den Punkt $L_0 \cap Y_0$ enthält. Mit der Definition $\mathcal{H} := \bigcup_{w \in O} [\![Y, w]\!]$, ist (1) erfüllt. Damit gelten insbesondere $Y_0 \subseteq \mathcal{H}$ und $x \in \langle \mathcal{H}\rangle \backslash \mathcal{H}$.

Beweis, dass $\mathcal{H}$ Bedingung (2) erfüllt:
Sei $L_1 \in \mathcal{L}_x$ ein Block, der x enthält und Y nicht schneidet. Wir betrachten die Zentralprojektion ρ der Geometrie $(X, \mathcal{L})$ mit Zentrum Y auf den Block L_0. Diese bildet L_1 auf L_0 und $L_1 \cap \mathcal{H}$ auf $L_0 \cap \mathcal{H}$ ab.
Sei $E = [\![L_0, L_1]\!]$. Dann ist $(E, \Xi(E), \mathcal{L}(E))$ eine desarguessche projektive Ebene, und weil $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n(X), k)-$Cap ist, ist $(E, \Xi(E), \mathcal{L}(E))$ eine Veronesemannigfaltigkeit vom Index 2. Seien $x_1 \in L_1$, $y := E \cap Y$, $L \in \mathcal{L}(E)_x \backslash \{L_0, L_1\}$ und $\beta : E \to E$ der projektive Automorphismus mit Achse L und Zentrum y, der x_1 auf $x_1^\rho \in L_0$ abbildet. Dann gilt für alle $z \in L_1$ die Gleichung

$$z^\beta = L(y, z) \cap L(x_1^\rho, L \cap L(x_1, z)) = L(y, z) \cap L_0 = z^\rho$$

und somit $\beta|_{L_1} = \rho|_{L_1}$. Damit ist β ein Automorphismus von E der $\mathcal{H} \cap L_1$ auf $O = L_0 \cap \mathcal{H}$ abbildet. Nach Lemma 4.3.27 ist β als Automorphismus mit Achse und Zentrum ein ausgezeichneter Isomorphismus und damit nach Satz 4.4.5 zu einer Äquivalenz von $(X(E), \Xi(E))$ fortsetzbar. Damit ist insbesondere $\mathcal{H} \cap L_1$ äquivalent zu O und somit ein Ovoid der Dimension $k - 2$, und (2) ist in diesem Fall bewiesen. Sei $L_2 \in \mathcal{L}_x$ ein Block, der x enthält und Y im

Punkt y schneidet. Enthielte L_2 einen weiteren Punkt $z \in \mathcal{H}$, wäre $L_2 \subseteq [\![Y, z]\!]$, und somit nach (1) in $\mathcal{H}$ enthalten, was wegen $x \notin \mathcal{H}$ nicht sein kann.

Beweis, dass $\mathcal{H}$ Bedingung (3) erfüllt:
Sei $z \in X \backslash \{x\}$. Wenn $L(x, z) \cap Y = \emptyset$ gilt, ist $z \in \langle L(x, z)\rangle = \langle L(x, z) \cap \mathcal{H}, x\rangle \subseteq \langle \mathcal{H}, x\rangle = \langle \mathcal{H}\rangle$. Andernfalls ist $y = L(x, z) \cap Y$ genau ein Punkt. In diesem Fall wählen wir eine Ebene E in $(X, \mathcal{L})$, die x und z enthält und den Unterraum Y nur im Punkt y schneidet. Aus (2) folgt, dass jeder x enthaltende Block, der Y nicht schneidet, in $\langle \mathcal{H}\rangle = \langle \mathcal{H}, x\rangle$ enthalten ist. Damit gilt für jeden Punkt $w \in E \backslash L(x, y)$ die Inklusion $w \in L(x, w) \subseteq \langle \mathcal{H}\rangle$. Wir wählen zwei Punkte $w_1, w_2 \in E \backslash L(x, y)$, dann gilt nach Lemma 4.2.5(2) die Gleichung $\langle E\rangle = \langle L(x, w_1), L(x, w_2), L(w_1, w_2)\rangle$. Damit gilt:

$$z \in \langle E\rangle = \langle L(x, w_1), L(x, w_2), L(w_1, w_2) \backslash L(x, y)\rangle \subseteq \langle \mathcal{H}\rangle.$$

insgesamt ist gezeigt, dass z in jedem Fall in $\langle \mathcal{H}\rangle$ enthalten ist. Damit gilt $\langle X\rangle \subseteq \langle \mathcal{H}\rangle$ und (3) ist bewiesen.

Beweis, dass $\mathcal{H}$ Bedingung (4) erfüllt:
Sei S ein 3−Raum in $(X, \mathcal{L})$, der x enthält und $[\![S, Y]\!] = X$ erfüllt. Dann ist $S \cap Y$ nur ein Block, und es existiert ein $L \in \mathcal{L}_x(S)$, so dass $L \cap Y = \emptyset$ gilt. Damit ist nach (2) insbesondere $L \subset \langle x, \mathcal{H} \cap S\rangle$. Seien Y_1 und Y_2 zwei verschiedene in $\mathcal{H}$ enthaltene Hyperebenen von $(X, \mathcal{L})$, die sich in Y schneiden. Nach Proposition 4.8.11 gilt $\dim\langle S\rangle = 6k - 3 = N(3, k)$, also können wir Lemma 4.8.7(3) anwenden und erhalten:

$$\langle S\rangle = \langle Y_1 \cap S, Y_2 \cap S, L\rangle \subseteq \langle x, \mathcal{H} \cap S\rangle.$$

Damit gilt auch $\dim\langle \mathcal{H} \cap S\rangle \geq 6k - 4$ nach Proposition 4.8.11.
Um den Beweis von (4) zu vollenden zeigen wir noch, dass $x \notin \langle S \cap \mathcal{H}\rangle$ gilt. Seien $y \in Y \cap S$ und E eine Ebene in S, die x aber nicht y enthält. Bei dieser Wahl von E ist $E \cap Y$ genau ein Punkt. Nach Lemma 4.8.7(1) sind $T_y(S)$ und $\langle E\rangle$ disjunkt. Daher gilt: $\dim\langle T_y(S), E\rangle = 3(k-1) + (3k-1) + 1 = 6k - 3$, und somit gilt auch: $\langle T_y(S), E\rangle = \langle S\rangle$. Also gibt es eine Zentralprojektion δ von $\langle S\rangle$ auf $\langle E\rangle$ mit Zentrum $T_y(S)$. Für $w \in \mathcal{H}$ ist dann $L(y, w)$ in $\mathcal{H}$ enthalten, denn nach (1) ist $\mathcal{H}$ Vereinigung von Hyperebenen, die Y enthalten. Wegen $L(y, w) \cap E \in \langle T_y(S), w\rangle \cap \langle E\rangle$ ist damit

$$w^\delta = \langle T_y(S), w\rangle \cap \langle E\rangle = L(y, w) \cap E \in \mathcal{H}.$$

Wir wiederholen das Argument und projizieren $\langle E\rangle$ auf den Aufspann eines Blockes L, der x aber nicht den Punkt $Y \cap E$ enthält. Als Zentrum wählen wir den Tangentialraum des Punktes $Y \cap E$. Wir erhalten, dass das Bild von $\mathcal{H}$ im Schnitt $\mathcal{H} \cap L$ liegen muss. Dies ist aber nach (2) nur ein Ovoid der Dimension $k - 2$, das somit nur einen $(k-1)$−Raum aufspannt, der x nicht enthält. Daraus folgt nach Lemma 3.2.2, dass x nicht im Bild von $\langle \mathcal{H}\rangle$ enthalten ist und somit auch nicht in $\langle \mathcal{H}\rangle$, womit auch (4) bewiesen ist. □

4.8.14. Lemma. *Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n(X), k)$−Cap mit Index i. Wenn $n(X) < N(i, k)$ gilt, ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ das Bild eines guten (n, k)−Caps mit $n = N(i, k)$ unter einer Zentralprojektion.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass jedes $(n(X), k)-$Cap mit $n(X) < N(i, k)$ Bild eines guten $(n, k)-$Caps mit $n = n(X) + 1$ unter einer Zentralprojektion ist. Induktion nach $N(i, k) - n$ liefert damit den Beweis dieses Lemmas.
Sei $n(X) < N(i, k)$. Dann ist nach Lemma 4.8.11 der Index $i > 3$, und nach Lemma 4.8.12 existiert eine nicht volle Hyperebene Y_0 von $(X, \mathcal{L})$ mit einem Punkt $x \in \langle Y_0 \rangle \cap X \backslash Y_0$. Somit existiert eine Menge $\mathcal{H}$ wie in Lemma 4.8.13. Wir betrachten jetzt $P_{n(X)}\mathbb{K}$ als Hyperebene in $P_{n(X)+1}\mathbb{K}$ und wählen zwei verschiedene Punkte $c, x^\Theta \in P_{n(X)+1}\mathbb{K} \backslash P_{n(X)}\mathbb{K}$ so, dass c, x, x^Θ kollinear sind. Wir werden für jeden Punkt $p \in X$ einen Punkt p^Θ konstruieren, so dass es eine Zentralprojektion mit Zentrum c gibt, die X^Θ auf X abbildet.
Für $y \in \mathcal{H}$ definieren wir $y^\Theta := y$. Für $y \in X \backslash \mathcal{H}$ verwenden wir die folgende Konstruktion:
Nach Lemma 4.8.13(2) ist $C_y := \mathcal{H} \cap L(x, y)$ ein Ovoid der Dimension $k - 2$ oder genau ein Punkt t. Im ersten Fall sei $y^\Theta := \langle c, y \rangle \cap \langle C_y, x^\Theta \rangle$. Im zweiten Fall sei
$y^\Theta := \langle c, y \rangle \cap \langle T_t(L(x, y)), x^\Theta \rangle$. In beiden Fällen ist y^Θ als Schnitt der Gerade $\langle c, y \rangle$ mit einem c nicht enthaltenden $k-$Raum im $(k + 1)-$Raum $\langle L(x, y), c \rangle$ wohldefiniert. So definieren wir $X^\Theta := \{y^\Theta \mid y \in X\}$, $L^\Theta := \{y^\Theta \mid y \in L\}$ für $L \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^\Theta := \{L^\Theta \mid L \in \mathcal{L}\}$ und $\Xi^\Theta := \{\langle L^\Theta \rangle \mid L \in \mathcal{L}\}$.
Wir sehen sofort, dass $P_{n(X)+1}\mathbb{K} = \langle \mathcal{H}, x^\Theta \rangle \subseteq \langle X^\Theta \rangle$ gilt. Als nächstes zeigen wir, dass $(X^\Theta, \mathcal{L}^\Theta)$ ein $(n(X)+1, k)-$Cap ist. Sei dazu $L \in \mathcal{L}$ beliebig. Dann existiert ein $3-$Raum S in $(X, \mathcal{L})$, der L und x enthält und zusammen mit Y den Raum $(X, \mathcal{L})$ erzeugt. Dann ist für alle $y \in X \cap S$ nach Lemma 4.8.13(4) der Schnitt $R := \langle S \cap \mathcal{H} \rangle \cap \langle L(x, y) \rangle$ wegen $\langle S \rangle = \langle S \cap \mathcal{H}, x \rangle$ ein in $\langle L(x, y) \rangle$ enthaltener $(k - 1)-$Raum. Dieser Schneidet das Ovoid $L(x, y)$ nach Lemma 2.2.25 in einem Ovoid der Dimension $k - 2$, oder ist der Tangentialraum $T_{L(x,y) \cap Y}(L(x, y))$. In beiden Fällen ist der Punkt y^Θ im $(6k - 3)-$Raum $U := \langle S \cap \mathcal{H}, x^\Theta \rangle$ enthalten, und es gilt $y^\Theta = \langle c, y \rangle \cap U$. Daher ist Θ Einschränkung einer Zentralprojektion mit Zentrum c von $\langle S \rangle$ auf U. Somit ist L^Θ ein Ovoid und Axiom (C1) ist erfüllt. Da weder einer der Räume $\xi^\Theta \in \Xi^\Theta$ noch einer der Räume $\xi \in \Xi$ den Punkt c enthält, ist nach Lemma 3.2.3 auch Axiom (C2) erfüllt.
Wählen wir nun einen Punkt $z \in X \backslash \mathcal{H}$ und bilden zu $y \in X$ den Punkt $y^{\Theta'}$ mit z und z^Θ statt x und x^Θ. Wenn wir einen $3-$Raum von $(X, \mathcal{L})$ betrachten, der x, y, z enthält und mit Y den ganzen Raum $(X, \mathcal{L})$ erzeugt, sehen wir, dass $y^\Theta = y^{\Theta'}$ gilt.
Sei nun V eine beliebige Ebene in $(X, \mathcal{L})$, die nicht in $\mathcal{H}$ enthalten ist. Wenn wir wie in den vorherigen Absätzen einen V enthaltenden $3-$Raum von $(X, \mathcal{L})$ konstruieren, der mit Y den ganzen Raum $(X, \mathcal{L})$ erzeugt und beachten, dass Θ mit jedem Punkt $z \in V \backslash \mathcal{H}$ definiert werden kann, sehen wir, dass $\dim\langle V^\Theta \rangle = \dim\langle V \rangle = 3k - 1$ gilt. Damit lässt sich Θ zu einer Kollineation von $\langle V \rangle$ auf V^Θ fortsetzen, also sind V auf V^Θ äquivalente Teilmengen von $P_{n(X)+1}\mathbb{K}$, und somit erfüllt auch V^Θ Axiom (C3). Da V beliebig war, ist (C3) damit für ganz X^Θ bewiesen. Insgesamt ist damit (X^Θ, Ξ^Θ) ein $(n(X) + 1, k)-$Cap und (X, Ξ) ist das Bild von (X^Θ, Ξ^Θ) unter einer Zentralprojektion mit Zentrum c. Da für jede Ebene E aus $(X^\Theta, \mathcal{L}^\Theta)$ die Einschränkung der Zentralprojektion auf E eine Äquivalenz auf eine Ebene aus $(X, \mathcal{L})$ ist, ist (X^Θ, Ξ^Θ) ein gutes $(n(X) + 1, k)-$Cap. $\square$

4.8.15. Satz. *Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n(X), k)-$Cap mit Index $i > 1$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik, dann gilt $n(X) \leq N(i, k)$. Falls $n(X) = N(i, k)$ gilt, ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit. Falls*

$n(X) < N(i,k)$ gilt, ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ äquivalent zum Bild einer Veronesemannigfaltigkeit unter einer Zentralprojektion.

Beweis: Falls $n(X) = N(i,k)$ gilt, ist dieser Satz mit Satz 4.8.8 bewiesen. Falls $n(X) < N(i,k)$ gilt, ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ nach Lemma 4.8.14 das Bild eines $(n,k)-$Caps mit $n = N(i,k)$ unter einer Zentralprojektion, welches nach Satz 4.8.8 äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit ist. $\square$

4.8.1. Beweis von Satz 3.4.3. Wir können jetzt Satz 3.4.3 beweisen, den wir zur Bequemlichkeit des Lesers wiederholen:
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und von zwei verschiedener Charakteristik der genau zwei Quadratklassen hat. Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n,5)-$Cap mit Index $i > 1$ in $P_n\mathbb{K}$. Dann ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ zu einer Veronesemannigfaltigkeit oder zu dem Bild einer Veronesemannigfaltigkeit unter einer Zentralprojektion äquivalent.

Sei $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein $(n,5)-$Cap mit Index $i > 1$ in $P_n\mathbb{K}$ über einem Körper $\mathbb{K}$, der nur zwei Quadratklassen hat. Dann ist nach Satz 4.6.11 jedes $(n,5)-$Cap vom Index 2 zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent, also ist $(X, \Xi, \mathcal{L})$ ein gutes $(n,k)-$Cap. Die Behauptung folgt mit Satz 4.8.15. $\square$

KAPITEL 5

Charakterisierung von $(n,k)-$Caps als $(n,k)-$Ovoidräume

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass $(n,k)-$Ovoidräume unter Hinzunahme spezieller Bedingungen $(n,k)-$Caps sind. Wir betrachten zunächst nur den Fall Index 2, also Ovoidebenen. Erst im Abschnitt 5.2 verallgemeinern wir die Ergebnisse auf Ovoidräume von beliebigem Index.
Für Ovoidebenen treffen wir die gleichen Festlegungen wie in Kapitel 3.2:
Sei für diesen Abschnitt $(X,\mathcal{L})$ eine $(n,k)-$Ovoidebene. Damit ist X eine erzeugende Teilmenge des n-dimensionalen projektiven Raumes $P_n\mathbb{K}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit mindestens 3 Elementen und $\mathcal{L}$ ist eine Menge von $(k-1)$-dimensionalen Ovoiden, so dass $\bigcup\mathcal{L} = X$ gilt und $(X,\mathcal{L})$ eine projektive Ebene ist.
Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ existiert genau ein Block $L(x,y) \in \mathcal{L}$, der x und y enthält. Da jeder Block $L \in \mathcal{L}$ ein Ovoid in $\langle L\rangle$ ist, gibt es zu jedem Punkt $x \in L$ einen $(k-1)-$dimensionalen Tangentialraum $T_x(L) \leq \langle L\rangle$. Zwei Blöcke $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ schneiden sich nach Definition in genau einem Punkt.
Wir definieren mit $T(x) := \langle\bigcup_{L\in\mathcal{L}_x} T_x(L)\rangle$ den von allen Tangentialräumen an x erzeugten Raum.

5.1. Ovoidebenen, die C2 erfüllen, sind $(n,k)-$Caps

Wir werden in diesem Abschnitt Satz 3.4.4 beweisen, also zeigen, dass sich in der Definition des $(n,k)-$Caps vom Index 2 die Axiome (C1) und (C3) durch die Forderung ersetzen lassen, dass das Cap eine projektive Ebene ist. Diese Situation tritt zum Beispiel auf, wenn wir bestimmte Unterebenen eines $(n,k)-$Caps betrachten. Wenn die Unterblöcke Ovoide der passenden Dimenson sind, vererbt sich (C2) automatisch und (C3), wie wir hier zeigen werden, auch.

Um zu zeigen, dass eine Ovoidebene ein $(n,k)-$Cap ist, müssen wir die Gültigkeit der Axiome (C1), (C2) und (C3) beweisen. Dazu sei in diesem Abschnitt $\mathbb{K}$ ein Körper mit mindestens 4 Elementen und $(X,\mathcal{L})$ eine Ovoidebene in $P_n\mathbb{K}$, so dass für alle Blöcke $L, M \in \mathcal{L}$ die Inklusion $\langle L\rangle \cap \langle M\rangle \subseteq X$ gilt. Somit erkennen wir, dass (C2) nach Voraussetzung gilt. Daraus folgt sofort $\langle L\rangle \cap \langle M\rangle = L \cap M$. Dabei ist $M \cap L$ immer genau ein Punkt, denn $(X,\mathcal{L})$ ist eine projektive Ebene. Das Axiom (C1) ist ebenfalls erfüllt:

5.1.1. Lemma. *Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ existiert genau ein $L \in \mathcal{L}$ mit $x, y \in \langle L\rangle$.*

Beweis: Weil $(X,\mathcal{L})$ eine projektive Ebene ist, existiert genau ein $L \in \mathcal{L}$ mit $x, y \in L$. Nehmen wir an, es existierte ein zweiter Block $M \in \mathcal{L}$ mit $x, y \in \langle M \rangle$. Dann gilt

$$\langle M \rangle \cap \langle L(x,y) \rangle \supseteq \langle x, y \rangle \not\subseteq X,$$

ein Widerspruch zu (C2). □

Um (C3) zu beweisen, müssen wir etwas mehr Aufwand betreiben. Insbesondere werden wir in $(X,\mathcal{L})$ bereits enthaltene $(n',k')-$Caps kleinerer Dimension finden und das in diesen gültige Axiom C3 auf (X,Ξ) übertragen. Um diese zu erkennen, verwenden wir eine Zentralprojektion.
Zunächst wollen wir die Hinzunahme des Axioms (C2) zur $(n,k)-$Ovoidebene nutzen, um noch mehr über die Zentralprojektionen, deren Zentrum von einem Block erzeugt wird, zu lernen.

5.1.2. Lemma. *Seien $L \in \mathcal{L}$ ein Block, ρ eine Zentralprojektion mit Zentrum $\langle L \rangle$ auf einen zu $\langle L \rangle$ disjunkten $(n-k-1)-$Raum U. Dann ist $\rho|_{X\setminus L}$ injektiv.*

Beweis: Seien $x, y \in X\setminus L$ und $p := L(x,y) \cap L$. Dann gilt nach (C2): $\langle L(x,y) \rangle \cap \langle L \rangle = p$. Wegen $p \notin \langle x, y \rangle$ gilt nach Lemma 3.2.3 auch $\dim\langle x, y \rangle^\rho = 1$. Nach Lemma 3.2.2 gilt aber auch $\langle x, y \rangle^\rho = \langle x^\rho, y^\rho \rangle$, also müssen x^ρ und y^ρ zwei verschiedene Punkte sein. □

5.1.3. Lemma. *Seien $L \in \mathcal{L}$ ein Block und ρ eine Zentralprojektion mit Zentrum $\langle L \rangle$ auf einen zu $\langle L \rangle$ disjunkten $(n-k-1)-$Raum U. Sei $M \in \mathcal{L}$ ein von L verschiedener Block und $p \in \langle M^\rho \rangle \setminus M^\rho$. Dann ist $p \notin X^\rho$.*

Beweis: Angenommen, p hätte ein Urbild $q \in X\setminus L$. Wir wählen $y \in M\setminus\{q\}$ und definieren $N := L(y,q)$. Dann gilt $\{p, y^\rho\} \subseteq \langle N^\rho \rangle \cap \langle M^\rho \rangle$. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von ρ auf $X\setminus L$, da der Schnitt der affinen Räume N^ρ und M^ρ dann eine affine Gerade minus einen Punkt enthalten müsste und alle Punkte des Schnittes bis auf y^ρ in N und M verschiedene Urbilder hätten. □

5.1.1. Konstruktion von Unterebenen.

Wir wollen nun $(5,2)$-Unterovoidebenen von $(X,\mathcal{L})$ finden, von denen J. Schillewaert und H. Van Maldeghem in **[SM1]** bereits gezeigt haben, dass sie zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent sind.

5.1.4. Lemma. *Seien C_1 und C_2 Ovale in den Blöcken $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, die sich in einem Punkt $x := L_1 \cap L_2 = C_1 \cap C_2$ schneiden. Dann liegen C_1 und C_2 in einer affinen Unterebene $\mathcal{A}$ von $(X,\mathcal{L})$, so dass der Schnitt eines jeden Blockes aus $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{A}$ entweder leer ist, oder aus genau einem Punkt oder einem punktierten Oval besteht.*

Beweis: Sei $L \in \mathcal{L}$ ein Block, der C_1 im Punkt $x_1 \neq x$ und C_2 im Punkt $x_2 \neq x$ schneidet. Sei ρ eine Projektion mit Zentrum $\langle L \rangle$ auf einen zu $\langle L \rangle$ disjunkten $(n-k-1)-$Raum U. Die Ovale C_1 und C_2 werden von der Zentralprojektion ρ nach Korollar 3.2.6 auf punktierte Geraden λ_1 und λ_2 abgebildet. Wir bezeichnen die unendlich fernen Punkte $\langle \lambda_1 \rangle \setminus \lambda_1$ und $\langle \lambda_2 \rangle \setminus \lambda_2$ mit p_1^∞ und p_2^∞. Weil ρ auf X injektiv ist und $C_1 \cap C_2 = x \notin \langle L \rangle$ gilt, schneiden sich λ_1 und λ_2 in

genau einem Punkt. Damit liegen λ_1 und λ_2 in einem 2–Raum $\pi \subseteq U$ und es gilt $p_1^\infty \neq p_2^\infty$. Wir definieren $\alpha := \pi \cap X^\rho$ und zeigen als nächstes, dass $\pi\backslash\alpha$ eine Gerade ist.
Seien dazu $z_1 \in C_1\backslash(L \cup \{x\})$, $z_2 \in C_2\backslash(L \cup \{x\})$. Das Oval $L(z_1, z_2) \cap \langle z_1, z_2, L(z_1, z_2) \cap L\rangle$ wird dann nach Korollar 3.2.6 von ρ auf eine punktierte Gerade $\lambda \subseteq \pi$ abgebildet.
Wir zeigen jetzt, dass $z^\infty := \langle\lambda\rangle\backslash\lambda$ auf der Geraden $l := \langle p_1^\infty, p_2^\infty\rangle$ liegt. Daraus folgern wir dann, dass $\alpha = \pi\backslash l$ gilt.
Nehmen wir also an, z^∞ läge nicht auf l. Für $i \in \{1, 2\}$ seien dann z_i' und z_i'' verschiedene Punkte aus C_i so, dass $z^\infty \in \langle z_1'^\rho, z_2'^\rho\rangle$ und $z^\infty \in \langle z_1''^\rho, z_2''^\rho\rangle$ gelten. Dann sind die punktierten Geraden $\lambda' = \langle z_1'^\rho, z_2'^\rho\rangle\backslash\{z^\infty\}$ und $\lambda'' = \langle z_1''^\rho, z_2''^\rho\rangle\backslash\{z^\infty\}$ wie λ im Bild von X enthalten. Das heißt, dass λ' und λ'' die Gerade l in verschiedenen Punkten q' und q'' schneiden. Diese haben dann verschiedene Urbilder u' und u'' unter ρ in X. Dann ist l nach Lemma 3.2.5 bis auf einen Punkt in $L(u', u'')^\rho$ enthalten. Somit muss mindestens einer der Punkte p_1^∞, p_2^∞ ein Urbild in $X\backslash L$ haben, ein Widerspruch zu Lemma 5.1.3.
Daher liegt z^∞ auf der Geraden l und hat nach Lemma 5.1.3 kein Urbild in $X\backslash L$, da z^∞ im Bild des Tangentialraumes $T_{L(z_1,z_2)\cap L}(L(z_1, z_2))$ liegt. Da jeder Punkt aus π auf einer Geraden liegt, die je einen Punkt aus λ_1 und λ_2 enthält, ist damit $\alpha = \pi\backslash l$ gezeigt. Damit ist α mit der von $P_n\mathbb{K}$ induzierten Inzidenz ein affiner 2–Raum und die Urbilder von Geraden aus α sind punktierte Ovale in X.
Da ρ eine Projektion ist, ist auch $\alpha^{\rho^{-1}}$ mit der Geradenmenge $\mathcal{C} := \{C \mid C^\rho \in \mathcal{L}(\alpha)\}$ eine affine Ebene. Um eine affine Unterebene von $(X, \mathcal{L})$ zu erhalten, muss noch gezeigt werden, dass keine zwei Ovale aus $\mathcal{C}$ in einem Block liegen. Annahme $C, D \in \mathcal{C}$ und $C \cup D \subseteq L \in \mathcal{L}$. Dann gibt es ein Oval $G \in \mathcal{C}$, das C und D in verschiedenen Punkten schneidet, aber nicht in L enthalten ist. Damit läge G in einem Block, der L in zwei verschiedenen Punkten schneidet, ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{A}$ mit der Punktmenge $\alpha^{\rho^{-1}}$ und Geradenmenge $\mathcal{L}(\mathcal{A}) := \{M \in \mathcal{L} \mid \exists C \in \mathcal{C} : C \subseteq M\}$ eine affine Unterebene der projektiven Ebene $(X, \mathcal{L})$. □

Für die nächsten zwei Lemmata seien C_1 und C_2 Ovale in den Blöcken $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, die sich im Punkt $x = L_1 \cap L_2 = C_1 \cap C_2$ schneiden und $\mathcal{A}$ eine nach Lemma 5.1.4 existierende affine Unterebene, die beide enthält. Die Geraden von $\mathcal{A}$ sind diejenigen Blöcke, die $\mathcal{A}$ in einem Oval schneiden. Weiterhin seien L wie im Beweis von Lemma 5.1.4 ein Block, der C_1 und C_2 in verschiedenen Punkten schneidet, und ρ eine Projektion mit Zentrum $\langle L\rangle$ auf einen zu $\langle L\rangle$ disjunkten $(n-k-1)$–Raum U.

5.1.5. Lemma. *Der projektive Abschluss von $\mathcal{A}$ ist eine projektive Unterebene von $(X, \mathcal{L})$.*

Beweis: Seien D_1 und D_2 Ovale, die die Urbilder zweier paralleler affiner Geraden λ_1 und λ_2 aus $\alpha = \mathcal{A}^\rho$ enthalten. Seien K_1 und K_2 die Blöcke, die D_1 und D_2 enthalten. Nehmen wir an, es wäre $y := K_1 \cap K_2 \notin L$. Dann ist $g := \langle y^\rho, \langle\lambda_1\rangle \cap \langle\lambda_2\rangle\rangle \subseteq \langle K_1^\rho\rangle \cap \langle K_2^\rho\rangle$ eine Gerade. Nach Lemma 3.2.5 kann $g \ni y$ je nur einen Punkt aus $\langle K_1^\rho\rangle\backslash K_1^\rho$ und $\langle K_2^\rho\rangle\backslash K_2^\rho$ enthalten. Damit enthält der Schnitt $K_1^\rho \cap K_2^\rho$ mehr als einen Punkt. Ein Widerspruch zur Injektivität von $\rho|_X$. Also ist $y \in L$. Da D_1 und D_2 je einen Punkt aus L enthalten müssen, gilt damit $D_1 \cap D_2 = y$. Da $y = K_1 \cap L$ mit D_1 bereits eindeutig bestimmt ist, kann D_2 beliebig gewählt werden. Somit ist gezeigt, dass das Urbild jeder zu λ_1 parallelen affinen Gerade in einem Oval enthalten ist, das y enthält. Da diese Punkte auf L liegen, ist der projektive Abschluss von $\mathcal{A}$ isomorph zu

$\left(\alpha^{\rho^{-1}} \cup \{A \cap L \mid A \in \mathcal{L}(\mathcal{A})\}, \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \{L\}\right)$, einer Unterebene von $(X, \mathcal{L})$. □

5.1.6. Lemma. *Ist S der projektive Abschluss von $\mathcal{A}$, so ist S eine quadratische Veronesemannigfaltigkeit.*

Beweis: Offenbar ist S im $(k+3)-$Raum $\langle \alpha, L\rangle = \langle \alpha^{\rho^{-1}}\rangle$ enthalten. Dieser schneidet den Aufspann jedes von L verschiedenen Blockes in höchstens einem $2-$Raum.
Der Block L ist ein beliebiger Block, der C_1 und C_2 schneidet. Wählen wir einen anderen Block J, der ein Oval aus $\mathcal{C}$ enthält, als Zentrum von ρ, ist L eine Gerade in $\mathcal{A}$. Daher ist auch $L \cap S$ ein Oval. Damit ist $\dim\langle L\rangle \cap \langle S\rangle = 2$ und nach Lemma 3.2.3 gilt die Gleichung $\dim\langle S\rangle = \dim\langle \alpha\rangle + \dim(\langle L\rangle \cap \langle S\rangle) + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$. Somit ist nach [**SM1**, Theorem 2.2] S eine quadratische Veronesemannigfaltigkeit. □

5.1.7. Proposition. *Sei $x \in X$. Dann ist $T(x)$ in einem $(2k-2)-$Raum enthalten, also ist (C3) erfüllt.*

Beweis: Seien L_1 und L_2 zwei Blöcke, die sich im Punkt $x \in X$ schneiden. Dann ist der Aufspann $T := \langle T_x(L_1), T_x(L_2)\rangle$ ein $(2k-2)-$Raum. Sei nun $L \in \mathcal{L}_x$ beliebig. Wir zeigen, dass $T_x(L) \subseteq T$ gilt. Sei dazu t eine Tangente in $\langle L\rangle$ an x und C ein Oval in L durch x, so dass t die Tangente an x in $\langle C\rangle$ ist. Sei $L' \in \mathcal{L}$ ein Block, der einen von x verschiedenen Punkt y aus C enthält. Dann ist $C' = L' \cap \langle y, L' \cap L_1, L' \cap L_2\rangle$ ein Oval. Damit sind C und C' nach Lemma 5.1.4 und Lemma 5.1.6 in einer quadratischen Veronesemannigfaltigkeit $S \subseteq X$ enthalten. Da S auch zwei Ovale $C_1 \subseteq L_1$ und $C_2 \subseteq L_2$ als Blöcke enthält, ist damit t im Aufspann von $T_{C_1}(x)$ und $T_{C_2}(x)$ enthalten. Dieser ist in T enthalten. Da t beliebig gewählt war, ist damit ganz $T_x(L)$ in T enthalten. Da auch L beliebig aus $\mathcal{L}_x$ ist, ist somit $T(x) \subseteq T$. □

5.1.2. Der Beweis, dass Ovoidebenen die C2 erfüllen, $(n,k)-$Caps sind. Wir können jetzt Satz 3.4.4 beweisen, den wir zur Bequemlichkeit des Lesers wiederholen:
Seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und $(X, \mathcal{L})$ eine Ovoidebene in $P_n\mathbb{K}$, so dass für alle Blöcke $L \neq M \in \mathcal{L}$ die Inklusion $\langle L\rangle \cap \langle M\rangle \subseteq X$ gilt. Dann ist das Tripel $(X, \Xi, \mathcal{L})$ mit $\Xi := \{\langle L\rangle \mid L \in \mathcal{L}\}$ ein $(n,k)-$Cap.
Die elliptischen Räume sind die Aufspanne der Blöcke. Axiom (C1) ist mit Lemma 5.1.1 erfüllt. Das Axiom (C2) gilt nach Voraussetzung, (C3) ist mit Proposition 5.1.7 gezeigt. □

5.2. Normale $(n,k)-$Ovoidebenen sind $(n,k)-$Caps

5.2.1. Definition. Eine *normale $(n,k)-$Ovoidebene* ist eine $(n,k)-$Ovoidebene, die die folgenden zusätzlichen Eigenschaften hat:

5.2.2. Axiom. Es gilt $n \geq 3k-1$.

5.2.3. Axiom. Für jeden Block $L \in \mathcal{L}$ gilt $\langle L\rangle \cap X = L$.

5.2.4. Axiom. Drei Blöcke, die sich nicht in einem Punkt schneiden, erzeugen mindestens eine Hyperebene.

In diesem Abschnitt wollen wir den folgenden Satz beweisen:

5.2.5. Satz. *Sei $(X, \mathcal{L})$ eine normale $(n, k)-$Ovoidebene im projektiven Raum $P_n\mathbb{K}$ über einem Körper $\mathbb{K}$ mit mindestens 4 Elementen. Dann ist das Paar (X, Ξ) mit $\Xi = \{\langle L\rangle \mid L \in \mathcal{L}\}$ ein $(n, k)-$Cap.*

In [**SM1**] und [**SM2**] wird für $k \leq 3$ gezeigt, dass alle $(n, k)-$Ovoidebenen, die Axiom 5.2.2 erfüllen, $(n, k)-$Caps sind, indem gezeigt wird, dass jede dieser $(n, k)-$Ovoidebenen normal ist. Da dieser Beweis in höheren Dimensionen so nicht funktioniert, haben wir den Begriff normale Ovoideben eingeführt. Wir betrachten hier nur den Fall $k > 2$, der Fall $k = 2$ ist in [**SM1**] bereits bewiesen.
Zum Beweis von Satz 5.2.5 müssen wir die Gültigkeit der Axiome aus Definition 3.1.1 zeigen. Mit $\xi(x, y) := \langle L(x, y)\rangle$ ist (C1) nach Lemma 5.2.7 klar. (C2) zeigen wir mit Satz 5.2.12. Wenn wir (C2) gezeigt haben, folgt (C3) mit Satz 3.4.4 aus Abschnitt 5.1.
Da $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene ist, enthält $T(x, \xi)$ bereits alle Tangenten an x, da jeder Block ξ schneidet. Daher gibt es keinen Unterschied zwischen $T(x, \xi)$ und $T(x) = \langle\bigcup_{L\in\mathcal{L}} T_x(L)\rangle$, dem Aufspann der Menge aller Punkte, die auf Tangenten durch x liegen. Zum Beweis von Satz 5.2.5 sei für diesen Abschnitt $(X, \mathcal{L})$ eine normale $(n, k)-$Ovoidebene und $\mathbb{K}$ ein Körper mit mindestens 4 Elementen.

5.2.6. Lemma. *Es gilt $n = 3k - 1$.*

Beweis: Um Axiom 5.2.4 anwenden zu können, betrachten wir den Aufspann von drei sich in verschiedenen Punkten schneidenden Blöcken. Dieser kann höchstens Dimension $3k-1$ haben, denn es gilt die Abschätzung:

$$\dim\langle\langle L_1, L_2\rangle, L_3\rangle \leq 2k + k - \dim(\langle L_1, L_2\rangle \cap \langle L_3\rangle) \leq 3k - \dim\langle L_1 \cap L_3, L_2 \cap L_3\rangle = 3k - 1.$$

Falls für je drei sich in verschiedenen Punkten schneidende Blöcke $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ der Aufspann $\dim\langle L_1, L_2, L_3\rangle = 3k - 1$ hat, schneiden sich Aufspanne von zwei Blöcken in nur einem Punkt. Daher ist (C2) erfüllt, und nach Abschnitt 5.1 ist (X, Ξ) ein $(n, k)-$Cap. Nach Lemma 4.2.5(2) gilt $P_n\mathbb{K} = \langle L_1, L_2, L_3\rangle$ und entsprechend $n = 3k - 1$.
Falls es drei sich in verschiedenen Punkten schneidende Blöcke $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ gibt, deren Aufspann nur Dimension $3k - 2$ hat, gilt nach Axiom 5.2.4 die Ungleichung $n - 1 \leq 3k - 2$ und mit Axiom 5.2.2 folgt $n = 3k - 1$. □

5.2.7. Lemma. *Der Aufspann zweier Blöcke $L, M \in \mathcal{L}$ ist mindestens $(2k - 1)$-dimensional.*

Beweis: Sei N ein Block der L und M in verschiedenen Punkten schneidet. Dann ist $\dim(\langle L, M\rangle \cap \langle N\rangle) \geq 1$ und es gilt nach Axiom 5.2.4 die Ungleichung:
$n - 1 \leq \dim\langle L, M, N\rangle \leq \dim\langle L, M\rangle + k - 1$. Daraus folgt, dass $\dim\langle L, M\rangle$ mindestens $n - k$ ist. Nach Lemma 5.2.6 gilt $n - k = 2k - 1$ und dieses Lemma ist bewiesen. □

5.2.1. Die Erzeugnisse zweier Blöcke schneiden sich in genau einem Punkt. Wir wollen jetzt zeigen, dass der Aufspann zweier Blöcke immer Dimension $2k$ hat, woraus sofort folgt, dass der Schnitt der Aufspanne der beiden Blöcke aus genau einem in X enthaltenen Punkt besteht, also (C2) erfüllt ist. Der Aufspann zweier Blöcke kann keine größere Dimension als $2k$ haben, weil sich je zwei Blöcke schneiden, da $(X, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene ist. Nach Lemma 5.2.7 hat der Aufspann von zwei Blöcken mindestens Dimension $2k-1$. Das heißt zwei Blöcke schneiden sich entweder in einem Punkt oder in einer Geraden. Wir wollen im Laufe dieses Abschnittes zeigen, dass der zweite Fall nicht vorkommt.

5.2.8. Lemma. *Seien $L_0 \in \mathcal{L}$, ρ eine Projektion mit Zentrum $\langle L_0\rangle$ und $u \in X^\rho$. Dann ist $u^{\rho^{-1}} \cap X$ genau ein Punkt oder ein Oval.*

Beweis: Seien $x \neq y \in u^{\rho^{-1}} \cap X$. Dann ist ρ auf $L(x,y)$ nicht injektiv, also ist $g = \langle L(x,y)\rangle \cap \langle L_0\rangle$ nach Lemma 3.2.5 mindestens eine Gerade und nach Lemma 5.2.7 höchstens eine Gerade. Nach Lemma 3.2.3 ist $u^{\rho^{-1}} \cap \langle L(x,y)\rangle$ damit ein 2−Raum. Dieser schneidet das Ovoid $L(x,y)$ in mindestens zwei Punkten x und y, also in einem Oval O. Angenommen es existiert ein Punkt $z \in u^{\rho^{-1}} \cap X\backslash O$. Dann ist ρ auf $M = L(x,z)$ nicht injektiv, also schneidet $\langle M\rangle$ das Zentrum $\langle L_0\rangle$ in einer Geraden. Das heißt nach Lemma 3.2.3, dass $\langle M^\rho\rangle$ ein $(k-2)$−Raum ist. Mit $u \in M^\rho \cap L(x,y)^\rho$ gilt dann

$$\dim\langle L_0, M, L(x,y)\rangle = \dim\langle L_0, M^\rho, L(x,y)^\rho\rangle \leq k + (k-2+k-2) + 1 = 3k-3 = n-2,$$

ein Widerspruch zu Axiom 5.2.4. □

5.2.9. Lemma. *Seien M und K zwei Blöcke mit $\dim\langle K, M\rangle = 2k-1$ und $L \in \mathcal{L}$ mit $M \cap K \notin L$, dann gilt $\dim\langle L, K\rangle = 2k$.*

Beweis: Sei ρ eine Projektion mit Zentrum $\langle K\rangle$ auf einen zu $\langle K\rangle$ disjunkten $(n-k-1)$−Raum U. Dann hat $\langle M^\rho\rangle$ Dimension $k-2$. Sei $d = \dim\langle L^\rho\rangle$. Nach Axiom 5.2.3 gilt $M \cap L \notin \langle K\rangle$, und damit existiert mit $(M \cap L)^\rho$ ein Schnittpunkt von L^ρ und M^ρ. Daher gilt nach Axiom 5.2.4 die Ungleichung:

$$\begin{aligned} n-1 &\leq \dim\langle K, L, M\rangle \\ &= \dim\langle K, L^\rho, M^\rho\rangle \\ &\leq k + (d+k-2-0) + 1 \\ &= 2k-1+d \\ &= n-k+d \end{aligned}$$

also ist $d \geq k-1$. Da sich K und L schneiden, ist $d \leq k-1$. Daher ist $\langle L^\rho\rangle$ ein $(k-1)$−Raum und es gilt $\dim\langle K, L\rangle = 2k$. □

5.2.10. Lemma. *Seien M und K zwei Blöcke mit $\dim\langle K, M\rangle = 2k-1$ und $M' \in \mathcal{L}_{K\cap M}\backslash\{K, M\}$. Dann gilt $\dim\langle K, M'\rangle = 2k-1$.*

Beweis: Seien ρ eine Projektion mit Zentrum $\langle K\rangle$ und $L \in \mathcal{L}$ mit $K \cap M \notin L$. Nach Lemma 5.2.9 ist $\dim\langle K, L\rangle = 2k$ und ρ ist auf $L\backslash\{L \cap K\}$ injektiv. Seien $x = M \cap L$, $x' = M' \cap L$, $u = x^\rho$, $u' = (x')^\rho$, wobei aus der Injektivität von ρ auf L folgt, dass $u \neq u'$ gilt. Seien

außerdem $w \in X^\rho \cap \langle u,u'\rangle \backslash \{u,u'\}$ und $z = w^{\rho^{-1}} \cap L$. Nach Lemma 5.2.8 ist $u^{\rho^{-1}} \cap X$ ein Oval in M, also existiert ein von x verschiedenes $y \in u^{\rho^{-1}} \cap X$. Wegen $z \notin M$ ist $M \neq L(y,z)$; wegen $M \cap L(y,z) = y$ gilt damit $K \cap M \notin L(y,z)$, also ist $\langle K\rangle \cap \langle L(y,z)$ nach Lemma 5.2.9 nur ein Punkt, und das Bild $\alpha := L(y,z)^\rho$ ist nach Lemma 3.2.5 ein affiner $(k-1)-$Raum in $P_n\mathbb{K}$.
Weil u und w in beiden affinen $(k-1)-$Räumen α und L^ρ liegen, ist $\alpha \cap L^\rho$ mindestens eine Gerade, der zwei Punkte fehlen.

Nehmen wir an, es gelte $u' \notin \alpha \cap L^\rho$. Sei p der Punkt auf $\langle u,u'\rangle$, der nicht in L^ρ liegt. Da mit u' bereits ein Punkt aus $\langle u,u'\rangle$ in α fehlt, muss $p \in \alpha$ gelten. Der Punkt p ist von der Wahl von y unabhängig. Das heißt mit einer anderen Wahl y' für y erhalten wir einen von $L(y,z)$ verschiedenen Block $L(y',z)$, dessen Bild ebenfalls die punktierte Gerade $\langle u,u'\rangle \backslash \{u'\}$ enthält. Also gibt es mindestens zwei Punkte in $q,q' \in X$ die von ρ auf p abgebildet werden. Daher enthält $L(q,q')$ nach Lemma 5.2.9 den Punkt $M \cap K \notin L$. Deswegen ist $L \cap L(q,q') \notin \langle K\rangle$ und $L(q,q')^\rho \cap L^\rho$ enthält den Punkt $(L \cap L(q,q'))^\rho$, der von $p \notin L^\rho$ verschieden sein muss. Damit muss $\langle L(q,q')^\rho\rangle \cap \langle L^\rho\rangle$ mindestens eine Gerade enthalten. Dann gilt

$$\dim\langle K,L,L(q,q')\rangle = \dim\langle K,L^\rho,L(q,q')^\rho\rangle = k + ((k-1)+(k-2)-1)+1 = 3k-3 = n-2,$$

ein Widerspruch zu Axiom 5.2.4.

Also ist $u' \in \alpha \cap L^\rho$. Daher existiert ein Punkt $x'' = (u')^{\rho^{-1}} \cap L(y,z)$, der von $x' \notin L(y,z)$ verschieden sein muss. Dann ist ρ auf $M'' = L(x',x'')$ nicht injektiv. Somit ist $\dim\langle M'',K\rangle = k-1$ und nach Lemma 5.2.9 gilt außerdem $K \cap M \in M''$. Damit liegen die Punkte x' und $K \cap M$ in $M' \cap M''$ und es gilt $M' = M''$. Demzufolge ist auch $\dim\langle M',K\rangle = 2k-1$. □

5.2.11. Lemma. *Es gibt einen Punkt $b \in X$, so dass der Aufspann zweier Blöcke, die sich nicht in b schneiden, $2k$-dimensional ist.*

Beweis: Seien $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathcal{L}$, so dass $\dim\langle N_1,N_2\rangle = 2k-1 = \dim\langle M_1,M_2\rangle$. Nehmen wir an, es wäre $M_1 \cap M_2 \neq N_1 \cap N_2$. Dann sei $L = L(N_1 \cap N_2, M_1 \cap M_2)$. Ohne Einschränkung ist $L \notin \{M_1,N_1\}$. Sei ρ eine Zentralprojektion mit Zentrum $\langle L\rangle$.
Nach Lemma 5.2.10 schneidet $\langle L\rangle$ den Aufspann jedes Blockes, der $N_1 \cap N_2$ oder $M_1 \cap M_2$ enthält, in einer Geraden. Das heißt, die Bilder der Blöcke N_1 und M_1 sind nach Lemma 3.2.3 in je einem $(k-2)-$Raum enthalten. Würden sich diese $(k-2)-$Räume schneiden, wäre

$$\dim\langle L,M_1,N_1\rangle = \dim\langle L,M_1^\rho,N_1^\rho\rangle \leq k + ((k-2)+(k-2)-0)+1 = 3k-3 < n-1,$$

ein Widerspruch zu Axiom 5.2.4. Also schneiden sich M_1^ρ und N_1^ρ nicht, was bedeutet, dass der Schnittpunkt von M_1 und N_1 in L liegen muss. Damit gilt
$N_1 \cap N_2 = N_1 \cap L = M_1 \cap N_1 = M_1 \cap L = M_1 \cap M_2$. □

5.2.12. Satz. *Der Aufspann zweier Blöcke ist $2k-$dimensional.*

Beweis: Sei der Aufspann von $L, M \in \mathcal{L}$ nur $(2k-1)$-dimensional und seien $b = M \cap L$ und $g = \langle M\rangle \cap \langle L\rangle$. Sei K ein Block, der b nicht enthält, dann ist nach Lemma 5.2.11 der Aufspann von K mit jedem beliebigem Block ein $2k$-Raum. Sei ρ eine Projektion mit Zentrum $\langle K\rangle$. Dann wird jeder Block von ρ auf einen affinen $(k-1)-$Raum abgebildet, und ρ ist auf

$X\backslash K$ injektiv, denn ρ ist auf jedem Block injektiv und je zwei Punkte liegen in einem Block. Nach Axiom 5.2.3 enthält g keinen der Punkte $M \cap K = \langle M \rangle \cap \langle K \rangle$ und $L \cap K = \langle L \rangle \cap \langle K \rangle$. Also wird g von ρ auf eine in $\langle M^\rho \rangle \cap \langle L^\rho \rangle$ enthaltene Gerade abgebildet. Da g^ρ mit b^ρ einen Punkt aus M^ρ bzw. L^ρ enthält, muss g^ρ nach Lemma 3.2.5 eine punktierte Gerade aus M^ρ und aus L^ρ enthalten. Diese enthält mehr als einen Punkt, der je ein Urbild aus L und aus M hat, was ein Widerspruch zur Injektivität von ρ auf X ist. □

5.3. Normale Ovoidräume sind $(n, k)-$Caps

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit $(n, k)-$Ovoidräumen vom Index $i \geq 2$ beschäftigen. J. A. Thas und H. Van Maldeghem zeigen mit [**TM2**, Theorem 2.2], dass für $k \in \{2, 3\}$ und $|\mathbb{K}| < \infty$ alle Ovoidräume mit $n \geq N(i, k) := \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i$ bereits $(n, k)-$Caps sind und $n = N(i, k)$ erfüllen. Wie im Fall $i = 2$ brauchen wir hier etwas mehr Voraussetzungen und führen daher den folgenden Begriff ein:

5.3.1. Definition. Ein *normaler* $(n, k)-$*Ovoidraum vom Index* i ist ein Ovoidraum $(X, \mathcal{L})$ vom Index i, so dass jede Ebene in $(X, \mathcal{L})$ eine normale Ovoidebene ist und die Ungleichung $n \geq N(i, k) := \frac{1}{2}(k-1)i^2 + \frac{1}{2}(k+1)i$ gilt.

Um Verwechslungen zu vermeiden, führen wir die folgende Notation ein: Für $M \subseteq \Pi$ sei wie bisher $\langle M \rangle$ der kleinste Unterraum von Π, der M enthält.
Für $M \subseteq X$ sei $[\![M]\!]$ der kleinste Unterraum von $(X, \mathcal{L})$ der M enthält.

5.3.2. Lemma. *Sei* $(X, \mathcal{L})$ *ein normaler* $(n, k)-$*Ovoidraum. Dann gilt für alle* $L \in \mathcal{L}$ *die Gleichung* $\langle K \rangle \cap X = L$.

Beweis: Sei $x \in X\backslash L$. Dann ist die Ebene $[\![L, x]\!]$ eine normale Ovoidebene und nach Axiom 5.2.3 gilt $x \notin \langle L \rangle$. □

5.3.3. Lemma. *Sei* $(X, \mathcal{L})$ *ein normaler* $(n, k)-$*Ovoidraum vom Index* $i > 2$ *und seien* H_1 *und* H_2 *Hyperebenen in* $(X, \mathcal{L})$. *Dann gilt* $n - k + 1 \leq \dim\langle H_1, H_2 \rangle$.

Beweis: Sei $L \in \mathcal{L}$ mit $H_1 \cap H_2 \cap L = \emptyset$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $x \in X\backslash L$. Die normale Ovoidebene $E := [\![L, x]\!]$ kann keinen Block aus $H_1 \cap H_2$ enthalten, denn Blöcke aus $H_1 \cap H_2$ schneiden L nicht. Also schneidet E die beiden Hyperebenen in zwei verschiedenen Blöcken. Nach Satz 5.2.5 ist E ein $(3k-1, k)-$Cap, und daher wird $\langle E \rangle$ nach Lemma 4.2.5(2) von je drei sich nicht in einem Punkt schneidenen Blöcken aus E aufgespannt. Damit gilt:

$$x \in E \subseteq \langle L, H_1 \cap E, H_2 \cap E \rangle \subseteq \langle L, H_1, H_2 \rangle.$$

Daraus folgt $X \subseteq \langle H_1, H_2, L \rangle$, und somit auch $\langle H_1, H_2, L \rangle = \langle X \rangle$. Weil $\langle L \rangle \cap \langle H_1, H_2 \rangle$ mindestens eine Gerade ist, ist damit die Ungleichung $n - k + 1 \leq \langle H_1, H_2 \rangle$ bewiesen. □

5.3.4. Lemma. *Sei $(X,\mathcal{L})$ ein normaler $(n,k)-$Ovoidraum vom Index $i \geq 2$ und sei H_1 eine Hyperebene in $(X,\mathcal{L})$ mit $d_1 := \dim\langle H_1\rangle$. Dann gilt:*

$$n - d_1 \leq N(i,k) - N(i-1,k).$$

Beweis: Wir verwenden Induktion nach i:
Nach Lemma 5.2.6 ist die Behauptung für $i = 2$ bewiesen. Sei also $i > 2$:
Wir wählen eine von H_1 verschiedene Hyperebene H_2 von $(X,\mathcal{L})$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $\dim\langle H_2\rangle - \dim\langle H_1 \cap H_2\rangle \leq N(i-1,k) - N(i-2,k)$. Damit gilt nach Lemma 5.3.3 die Ungleichung:

$$n - k + 1 \leq \dim\langle H_1, H_2\rangle \leq d_1 + N(i-1,k) - N(i-2,k).$$

Diese Ungleichung lösen wir nach $n - d_1$ auf und erhalten:

$$\begin{aligned} n - d_1 &\leq N(i-1,k) - N(i-2,k) + (k-1) \\ &= \tfrac{1}{2}(k-1)\left((i-1)^2 - (i-2)^2 + 2\right) + \tfrac{1}{2}(k+1)\left((i-1) - (i-2)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(k-1)(i^2 - 2i + 1 - i^2 + 4i - 4 + 2) + \tfrac{1}{2}(k+1)(i - i + 1) \\ &= \tfrac{1}{2}(k-1)(i^2 - i^2 + 2i - 1) + \tfrac{1}{2}(k+1)(i - (i-1)) \\ &= \tfrac{1}{2}(k-1)(i^2 - (i-1)^2) + \tfrac{1}{2}(k+1)(i - (i-1)) \\ &= N(i,k) - N(i-1,k). \end{aligned}$$

□

5.3.5. Korollar. *Sei $(X,\mathcal{L})$ ein normaler $(n,k)-$Ovoidraum vom Index $i > 2$. Dann ist jeder Unterraum von $(X,\mathcal{L})$ mit Dimension $d > 1$ ein normaler Ovoidraum.*

Beweis: Wir zeigen, dass jede Hyperebene von $(X,\mathcal{L})$ normal ist. Mit Induktion ist dann klar, dass jeder Unterraum von $(X,\mathcal{L})$ mit Dimension $d > 1$ ein normaler Ovoidraum ist. Sei daher H eine Hyperebene in $(X,\mathcal{L})$.
Weil alle Ebenen in H als Ebenen in $(X,\mathcal{L})$ normal sind, bleibt noch zu zeigen, dass die Ungleichung $d := \dim\langle H\rangle \geq N(i-1,k)$ gilt. Nach Lemma 5.3.4 gilt: $n-d \leq N(i,k)-N(i-1,k)$, woraus mit $n \geq N(i,k)$ unsere Behauptung folgt. □

5.3.6. Korollar. *Es gilt $n = N(i,k)$.*

Beweis: Wir verwenden Induktion nach i. Für $i = 2$ ist die Behauptung mit Lemma 5.2.6 bewiesen.
Für den Induktionsschluss sei H eine Hyperebene $(X,\mathcal{L})$. Nach Korollar 5.3.5 ist H normal. Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 5.3.4 gilt dann die Ungleichung $n - N(i-1,k) \leq N(i,k) - N(i-1,k)$. Daraus folgt $n \leq N(i,k)$, woraus mit $n \geq N(i,k)$ unsere Behauptung folgt. □

5.3.1. Beweis von Satz 3.4.5. Wir können jetzt Satz 3.4.5 beweisen, den wir zur Bequemlichkeit des Lesers wiederholen:
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $|\mathbb{K}| > 3$ und seien $1 < i,k,n \in \mathbb{N}$. Sei $(X,\mathcal{L})$ ein normaler $(n,k)-$Ovoidraum vom Index $i \geq 2$ in $P_n\mathbb{K}$. Dann ist das Tripel $(X,\Xi,\mathcal{L})$ mit $\Xi := \{\langle L\rangle \mid L \in \mathcal{L}\}$ ein $(n,k)-$Cap.
Wir zeigen, dass $(X, \Xi = \{\langle L\rangle \mid L \in \mathcal{L}\})$ ein $(n,k)-$Cap ist, indem wir die Gültigkeit der Axiome aus Definition 3.1.1 überprüfen:

(C1): Je zwei Punkte $x, y \in X$ sind in einer normalen Unter-Ovoidebene $(E, \mathcal{L}(E))$ enthalten. Sei $\Xi(E) := \{\langle L\rangle \mid L \in \mathcal{L}(E)\}$, dann ist nach Satz 5.2.5 $(E, \Xi(E))$ ein $(3k-1, k)-$Cap. Insbesondere gilt (C1), also sind x und y in einem elliptischen Raum $\xi \in \Xi(E) \subseteq \Xi$ enthalten. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 5.3.2.

(C2): Seien $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ mit $L_1 = \xi_1 \cap X \in \mathcal{L}$ und $L_2 = \xi_2 \cap X \in \mathcal{L}$.
Falls $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ gilt, sind L_1 und L_2 in einer normalen Ovoidebene $(E, \mathcal{L}(E))$ in $(X, \mathcal{L})$ enthalten. Dann ist nach Satz 5.2.5 $(E, \xi(E))$ ein $(3k-1, k)-$Cap. Insbesondere gilt (C2), also ist $\xi_1 \cap \xi_2 \subseteq E \subseteq X$.
Wir betrachten nun den Fall $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Nehmen wir an, es gibt einen Punkt $p \in \langle L_1\rangle \cap \langle L_2\rangle$. Dann ist $[\![L_1, L_2]\!]$ ein $3-$Raum in $(X, \mathcal{L})$, also nach Lemma 5.3.5 normal. Der $3-$Raum $[\![L_1, L_2]\!]$ enthält einen Block M, der L_1 und L_2 schneidet. Dann sind $E_1 := [\![M, L_1]\!]$ und $E_2 := [\![M, L_2]\!]$ Ebenen in $[\![L_1, L_2]\!]$. Nach Lemma 5.3.3 gilt:
$\dim\langle E_1, E_2\rangle \geq \dim\langle [\![L_1, L_2]\!]\rangle - k + 1 \geq N(3, k) - k + 1 = 5k - 2$. daraus folgt:
$\dim(\langle E_1\rangle \cap \langle E_2\rangle) = (3k-1) + (3k-1) - \dim\langle E_1, E_2\rangle \leq k = \dim\langle E_1 \cap E_2\rangle$. Damit ist $\langle p, M\rangle$ im $k-$Raum $\langle E_1\rangle \cap \langle E_2\rangle$ enthalten. Weil E_1 ein $(3k-1, k)-$Cap ist, kann nach (C2): $p \notin X \Rightarrow p \in \langle L_1\rangle \backslash \langle M\rangle$. Daher ist $\langle p, M\rangle$ ein $(k+1)-$Raum. Dies ist ein Widerspruch zu $\langle p, M\rangle \subseteq \langle E_1\rangle \cap \langle E_2\rangle$. Also ist die Annahme $\langle L_1\rangle \cap \langle L_2\rangle \neq \emptyset$ falsch und (C2) ist erfüllt.

(C3): Seien $x \in X$ und $\xi \in \Xi$ mit $x \notin \xi$. Sei $L := \xi \cap X$. Dann sind alle Tangentialräume $T_x(L(x, y))$ mit $y \in L$ in der der normalen Unter-Ovoidebene $[\![x, L]\!]$ enthalten, und $[\![x, L]\!]$ ist nach Satz 5.2.5 ein $(3k-1, k)-$Cap. Insbesondere gilt (C3), also sind alle Tangentialräume $T_x(L(x, y))$ mit $y \in L$ in einem gemeinsamen $(2k-2)$-dimensionalen Unterraum $T(x, \xi)$ enthalten.

$\square$

KAPITEL 6

Charakterisierung durch Schnitte

Nachdem wir in den vorherigen Kapiteln Veronesemannigfaltigkeiten als $(n, k)-$Caps und $(n, k)-$Caps als $(n, k)-$Ovoidebenen charakterisiert haben, gehen wir noch einen Schritt weiter und charakterisieren $(n, k)-$Ovoidebenen. Dies tun wir, indem wir ihr Schnittverhalten mit Unterräumen des umgebenden Raumes betrachten und so äquivalente Definitionen für $(n, k)-$Ovoidebenen erhalten. Hier werden nur die Fälle $k \in \{2, 3\}$ behandelt, allerdings für beliebige Körper mit Charakteristik ungleich 2 und mindestens vier Elementen.
Als Inspiration diente dazu [**TM2**, Theorem 2.3], in dem Veronesemannigfaltigkeiten durch die Mächtigkeit ihrer Schnitte mit Hyperebenen charakterisiert werden. Wenn der Grundkörper nicht endlich ist, sind es die Schnitte von $(n, k)-$Caps mit Hyperebenen auch nicht und daher lässt sich [**TM2**, Theorem 2.3] weder direkt übertragen, noch sind die Beweisideen anwendbar.

6.1. Charakterisierung von (5,2)-Ovoidebenen

Wir wollen $(5, 2)-$Ovoidebenen und damit auch quadratische Veronesemannigfaltigkeiten charakterisieren, indem wir Satz 3.4.6 beweisen. Um Satz 3.4.6 zu beweisen, wollen wir Teilmengen $V \subset P_5(\mathbb{K})$, die die Bedingungen aus Satz 3.4.6 erfüllen einen Namen geben. Sei dazu $\mathbb{K}$ ein Körper mit mindestens vier Elementen, dann enthält jede Gerade und jedes Oval in $P_5\mathbb{K}$ mindestens fünf Punkte.

6.1.1. Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit mindestens 4 Elementen. Dann heißt eine Teilmenge $V \subset P_5(\mathbb{K})$ eine *Q-Menge*, wenn die folgenden Axiome gelten:
(V1): Sei H eine Hyperebene, so dass $H \cap V$ ein Oval und zwei verschiedene, nicht in dem Oval enthaltene Punkte enthält. Dann ist $H \cap V$ die Vereinigung von zwei sich in genau einem Punkt schneidenden Ovalen.
(V2): Sei E ein $2-$Raum mit $|E \cap V| \geq 4$, dann enthält $E \cap V$ ein Oval.
(V3): V enthält mindestens zwei verschiedene Ovale, deren Vereinigung nicht ganz V ist.

Um Satz 3.4.6 zu beweisen, müssen wir zeigen, dass jede Q-Menge Punktmenge einer Ovoidebene ist, und dass umgekehrt die Punktmenge einer $(5, 2)-$Ovoidebene immer eine Q-Menge ist.

Sei für diesen Abschnitt $V \subset P_5(\mathbb{K})$ eine Q-Menge. Mit $\mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir die Menge aller Ovale, die als Schnitte von $2-$Räumen mit V entstehen.
Wir zeigen mit den folgenden Lemmata, dass $(V, \mathcal{L}(V))$ eine $(5, 2)-$Ovoidebene ist. Da [**SM1**,

Theorem 2.2] besagt, dass jede $(5,2)-$Ovoidebene äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit ist, ist der Beweis, dass jede Q-Menge eine Veronesemannigfaltigkeit ist, damit erbracht.

6.1.2. LEMMA. *Seien $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$, dann ist $L_1 \cap L_2$ höchstens ein Punkt.*

Beweis: Wäre $|L_1 \cap L_2| > 1$, verstieße jede Hyperebene, die $L_1 \cup L_2$ enthält, gegen (V1). $\square$

6.1.3. LEMMA. *Seien $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ mit $L_1 \neq L_2$, dann ist $\langle L_1 \rangle \cap \langle L_2 \rangle$ genau ein Punkt.*

Beweis: Nehmen wir zunächst an, $\langle L_1 \rangle \cap \langle L_2 \rangle$ sei leer. Seien $x, y \in L_2$, so dass $\langle x, y \rangle \cap \langle L_1 \rangle = \emptyset$. Dann schneidet die Hyperebene $H = \langle L_1, x, y \rangle$ die Menge V nach (V1) in zwei sich schneidenden Ovalen L_1, L_3, wobei L_3 die Punkte x und y enthalten muss, womit der Schnitt $L_2 \cap L_3$ mindestens 2 Punkte enthielte. Da $L_2 = L_3$ wegen $\langle L_1, L_2 \rangle = P_5\mathbb{K}$ unmöglich ist, ist das ein Widerspruch. Also ist $\langle L_1 \rangle \cap \langle L_2 \rangle \neq \emptyset$ und somit existiert nach (V1) ein Schnittpunkt $L_1 \cap L_2$.

Als nächstes nehmen wir an, es gelte $\langle L_1 \rangle = \langle L_2 \rangle$. Sei $x_2 \in L_2 \backslash (L_1 \cap L_2)$. Dann gibt es einen Punkt $x_1 \in L_1$, der nicht in $T_{x_2}(L_2) \cup \langle x_2, L_1 \cap L_2 \rangle$ enthalten ist. Damit liegt x_1 auf einer Sekanten $s := \langle x_1, x_2 \rangle$ von L_2, die den Punkt $L_1 \cap L_2$ nicht enthält. Nach (V3) existiert ein Punkt $v \in V \backslash (L_1 \cup L_2)$. Der 2-Raum $\langle s, v \rangle$ enthält also mindestens vier Punkte aus V und damit nach (V2)auch ein Oval $L_3 \in \mathcal{L}(V)$. Das Oval L_3 enthält nach Konstruktion nicht den Schnittpunkt $L_1 \cap L_2$. Jede Hyperebene, die den $3-$Raum $\langle L_1, L_2, L_3 \rangle$ enthält, verstößt daher gegen Axion (V1).

Nehmen wir nun an, $g := \langle L_1 \rangle \cap \langle L_2 \rangle$ wäre eine Gerade. Dann ist $R = \langle L_1, L_2 \rangle$ dreidimensional. Es gibt im Aufspann eines Ovals höchstens einen Punkt, der auf keiner Sekante des Ovals liegt. Weil Geraden nach Voraussetzung mindestens vier Punkte enthalten, gibt es daher einen Punkt $a \in \langle L_1 \rangle \cap \langle L_2 \rangle \backslash (L_1 \cap L_2)$, der auf je einer von g verschiedenen Sekante s_1 durch L_1 und s_2 durch L_2 liegt. Der $2-$Raum $E = \langle s_1, s_2 \rangle$ enthält dann vier Punkte aus V, muss also nach (V2) ein Oval $L_3 \in \mathcal{L}$ enthalten. Wegen $g \cap E = a \notin V$, kann L_3 den Schnittpunkt $L_1 \cap L_2$ nicht enthalten. Damit widerspricht jede den 3-Raum $\langle L_1, L_2, L_3 \rangle$ enthaltende Hyperebene Axiom (V1).

Somit muss $\langle L_1 \rangle \cap \langle L_2 \rangle$ genau ein Punkt sein, da alle anderen Fälle ausgeschlossen wurden. $\square$

Aus Lemma 6.1.3 folgen direkt einige sehr hilfreiche Korollare:

6.1.4. KOROLLAR. *Zwei Ovale $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ schneiden sich in genau einem Punkt.*

Beweis: Nach Lemma 6.1.3 ist $\langle L_1, L_2 \rangle$ eine Hyperebene. Nach (V1) schneiden sich L_1 und L_2 in genau einem Punkt. $\square$

6.1.5. KOROLLAR. *Der Schnitt eines $2-$Raumes E mit V ist höchstens ein Oval.*

6.1.6. KOROLLAR. *Die Menge V ist ein Cap in $P_5\mathbb{K}$.*

Beweis: Sei g eine Gerade, die drei Punkte x, y, z aus V enthält. Es existiert ein $v \in V \backslash g$, weil V aus mindestens zwei Ovalen besteht. Der $2-$Raum $E := \langle g, v \rangle$ muss V nach (V2) und Korollar 6.1.5 in genau einem Oval schneiden, das keine drei Punkte einer Geraden enthalten kann. □

6.1.7. LEMMA. *Zu zwei Punkten $x, y \in V$ existiert ein Oval $L \in \mathcal{L}(V)$, das weder x noch y enthält.*

Beweis: Um dieses Lemma zu beweisen, konstruieren wir drei Ovale, die sich in einem Punkt $z \notin \{x, y\}$ schneiden. Dann ist klar, dass die zwei Punkte x, y in höchstens zwei dieser drei Ovale liegen können.

Nach (V3) existieren zwei verschiedene Ovale $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ und ein Punkt $v \in V \backslash (L_1 \cup L_2)$. Nach Lemma 6.1.3 ist $\langle L_1, L_2 \rangle$ eine Hyperebene, und nach Axiom (V1) ist $p := L_1 \cap L_2$ genau ein Punkt.
Sei $z \in L_1 \backslash \{x, y, p\}$. Dann gibt es eine Hyperebene H des $P_5\mathbb{K}$ die $\langle L_2, z, v \rangle$ enthält und es gilt nach Axiom (V1): $H \cap V = L_2 \cup L_3$ mit einem Oval $L_3 \in \mathcal{L}(V)$, das L_1 in z schneidet.
Wir wiederholen diese Konstruktion, mit einem weiteren Punkt $z' \in L_1 \backslash \{z, p\}$. Dann gibt es eine Hyperebene H' des $P_5\mathbb{K}$ die $\langle L_2, z', v \rangle$ enthält und es gilt nach Axiom (V1): $H' \cap V = L_2 \cup L_4$ mit einem Oval $L_4 \in \mathcal{L}(V)$, das L_1 in z' schneidet, also von L_2 und L_3 verschieden ist. Da $L_3 \cap L_4 = v$ gilt, ist L_4 auch von L_1 verschieden. Weil das Oval L_4 mindestens vier Punkte enthält, existiert daher ein Punkt $w \in L_4 \backslash (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$. Sei H'' eine Hyperebene des $P_5\mathbb{K}$ die $\langle L_2, z, w \rangle$ enthält. Nach Axiom (V1) gilt: $H'' \cap V = L_2 \cup L_5$ mit einem Oval $L_5 \in \mathcal{L}(V)$, das z enthält.
Wegen $w \in L_5 \backslash (L_1 \cup L_3)$ und $v \in L_3 \backslash L_1$ haben wir mit L_1, L_3, L_5 wie angekündigt drei verschiedene Ovale L_1, L_3, L_5, die sich im Punkt $z \notin \{x, y\}$ schneiden. □

6.1.8. LEMMA. *Zu je zwei Punkten $x, y \in V$ gibt es genau ein Oval $L \in \mathcal{L}(V)$, das beide enthält.*

Beweis: Nach Lemma 6.1.7 gibt es ein $L' \in \mathcal{L}(V)$, das weder x noch y enthält. Sei H eine Hyperebene mit $\langle x, y, L' \rangle \subseteq H$. Dann ist $H \cap V$ die Vereinigung zweier Ovale L' und L. Die Punkte x und y müssen beide auf L liegen. Nach Lemma 6.1.2 ist L eindeutig bestimmt. □

6.1.9. LEMMA. *Es gilt $\langle V \rangle = P_5\mathbb{K}$.*

Beweis: Es gibt eine Hyperebene H, die zwei Ovale L_1 und L_2 aus $\mathcal{L}(V)$ enthält. Die von diesen beiden erzeugten $2-$Räume schneiden sich nur in einem Punkt $p = L_1 \cap L_2$, also ist $\langle L_1, L_2 \rangle = H$. Sei $x_i \in L_i \backslash \{p\}$, dann existiert ein Oval $L_3 \in \mathcal{L}(V)$ mit $x_1, x_2 \in L_3$. Weitere Punkte aus $H \cap V$ kann L_3 nicht enthalten, es muss also noch weitere Punkte aus V ausserhalb von H geben. Damit ist $\langle V \rangle = P_5\mathbb{K}$ bewiesen. □

6.1.1. Beweis von Satz 3.4.6. Wir können jetzt Satz 3.4.6 beweisen, den wir unter Verwendung des Begriffs Q-Menge wiederholen:
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik größer als zwei und mindestens vier Elementen, dann ist eine Teilmenge $V \subseteq P_5\mathbb{K}$ genau dann Punktmenge einer $(5,2)-$Ovoidebene, wenn V eine Q-Menge ist. Damit ist V nach [**SM1**] *auch Punktmenge eines $(5,2)-$Caps, das zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist.*

Sei V eine Q-Menge, dann ist $(V, \mathcal{L}(V))$ nach (V3), Lemma 6.1.4 und Lemma 6.1.8 eine projektive Ebene. Die Blöcke aus $\mathcal{L}(V)$ sind Ovale und nach Lemma 6.1.9 gilt $\langle V\rangle = P_5\mathbb{K}$. Also ist $(V, \mathcal{L}(V))$ eine $(5,2)-$Ovoidebene.

Sei umgekehrt $(V, \mathcal{L}(V))$ eine $(5,2)-$Ovoidebene. Dann ist $(V, \mathcal{L}(V))$ nach [**SM1**, Theorem 2.2] eine Veronesemannigfaltig vom Index zwei. Das nutzen wir, um zu zeigen, dass V alle Axiome einer Q-Menge erfüllt:
(V1): Sei H eine Hyperebene, so dass $H \cap V$ ein Oval und zwei verschiedene, nicht in dem Oval enthaltene Punkte x, y enthält. Dann ist $L(x,y) \subseteq \langle x, y, L(x,y) \cap O\rangle \subseteq H$. Sei $v \in V \backslash (O \cup L(x,y))$. Sei $O' \in \mathcal{L}(V)$ ein v aber nicht $L(x,y) \cap O$ enhtaltender Block. Dann gilt $P_5\mathbb{K} = \langle O, L(x,y), O'\rangle = \langle O, L(x,y), v\rangle \not\subseteq H$, also ist $v \notin H$.
(V2): Sei E ein $2-$Raum mit $|E \cap V| \geq 4$, dann enthält $E \cap V$ nach Lemma 3.1.9 ein Oval.
(V3): Weil $(V, \mathcal{L}(V))$ eine projektive Ebene ist, enthält V mindestens zwei verschiedene Ovale deren Vereinigung nicht ganz V ist. □

6.2. Charakterisierung von (8,3)-Ovoidebenen

Hier wollen wir ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt zeigen, dass wir $(n,k)-$Ovoidebenen auch im Fall $k = 3$ und $n = 8$ durch ihre Schnitte mit Unterräumen charakterisieren können. Dazu wollen wir Satz 3.4.7 beweisen. Dazu führen wir den Begriff H-Menge ein, der eine Teilmenge $V \subset P_8(\mathbb{K})$ bezeichnet, die die Voraussetzungen von Satz 3.4.7 erfüllt.

6.2.1. Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik größer als zwei und sei $V \subset P_8(\mathbb{K})$, so dass die folgenden Axiome gelten:
(H1): Sei S ein $3-$Raum. Wenn $S \cap V$ zwei verschiedene Ovale enthält, dann ist $S \cap V$ ein Ovoid.
(H2): Wenn eine Hyperebene zwei Punkte aus V enthält, enthält sie auch ein Oval aus V das beide Punkte enthält.
(H3): Sei H eine Hyperebene. Wenn $H \cap V$ zwei verschiedene dreidimensionale Ovoide enthält, besteht $H \cap V$ aus dreidimensionalen Ovoiden, die sich alle in genau einem Punkt schneiden.
(H4): $\langle V\rangle = P_8\mathbb{K}$.
Dann nennen wir V eine *H-Menge*.
Sei $\mathcal{L}(V)$ die Menge aller Ovoide die als Schnitte von 3-Räumen mit V entstehen. Diese Ovoide nennen wir ab jetzt die Blöcke der H-Menge.

Um Satz 3.4.7, der besagt, dass jede H-Menge eine Veronesemannigfaltigkeit ist, zu beweisen wollen jetzt zeigen, dass das Paar $(V, \mathcal{L}(V))$ eine $(8,3)-$Ovoidebene ist. Da J. Schillewaert und H. Van Maldeghem in [**SM2**, Theorem 2.5] gezeigt haben, dass jede $(8,3)-$Ovoidebene äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit ist, ist der Beweis, dass jede H-Menge eine Veronesemannigfaltigkeit ist, damit erbracht.
Da die Blöcke von V nach Definition Ovoide sind, und $\langle V \rangle = P_8\mathbb{K}$ wegen (H4) erfüllt ist, ist es der entscheidende Teil des Beweises von Satz 3.4.7, zu zeigen, dass $(V, \mathcal{L}(V))$ eine projektive Ebene ist. Dazu zeigen wir mit den folgenden zwei Lemmata, dass sich je zwei Blöcke in genau einem Punkt schneiden und dass je zwei Punkte aus V durch genau einen Block verbunden sind.

6.2.2. Lemma. *Zwei Blöcke schneiden sich in genau einem Punkt.*

Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus (H3). □

6.2.3. Lemma. *Zwei Punkte sind durch genau einen Block verbunden.*

Beweis: Nach Lemma 6.2.2 ist "höchstens ein" erfüllt.
Mindestens ein: Seien $x, y \in V$. Sei H_1 eine Hyperebene, die beide enthält. Dann existiert nach (H2) ein Oval mit $x, y \in O_1 \subset V \cap H_1$. Sei nun H_2 eine Hyperebene, die x und y, aber nicht O_1 enthält. Dann existiert nach (H2) ein Oval mit $x, y \in O_2 \subset V \cap H_2$. Der 3-Raum $\langle O_1, O_2 \rangle$ enthält nach (H1) einen Block, der x und y verbindet. □

6.2.1. Beweis von Satz 3.4.7. Wir können jetzt Satz 3.4.7 beweisen, den wir zur Bequemlichkeit des Lesers wiederholen:
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik größer als zwei, dann ist eine Teilmenge $V \subseteq P_8\mathbb{K}$ genau dann Punktmenge einer $(8,3)-$Ovoidebene, wenn V eine H-Menge ist. Damit ist V nach [**SM2**] *auch Punktmenge eines $(8,3)-$Caps, das zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist.*
Sei V eine H-Menge, dann ist $(V, \mathcal{L}(V))$ nach Lemma 6.2.2 und Lemma 6.2.3 eine projektive Ebene, deren Blöcke Ovoide der Dimension zwei sind. Nach (H4) spannt V den ganzen $P_8\mathbb{K}$ auf, also ist $(V, \mathcal{L}(V))$ eine $(n,k)-$Ovoidebene.
[**SM2**, Theorem 2.5] besagt, dass jede $(8,3)-$Ovoidebene äquivalent zu einer Veronesemannigfaltigkeit ist.

Sei umgekehrt $(V, \mathcal{L})$ eine $(n,k)-$Ovoidebene. Dann ist $(V, \mathcal{L})$ nach [**SM2**, Theorem 2.5] eine Veronesemannigfaltigkeit und somit ein $(8,3)-$Cap. Mit Hilfe der Axiome (C1), (C2) und (C3) eines $(8,3)-$Caps können wir zeigen, dass $(V, \mathcal{L})$ auch die Axiome einer H-Menge erfüllt:
H1: Sei S ein 3-Raum der zwei in V enthaltene Ovale O_1 und O_2 enthält. Nach Lemma 3.1.9 existieren zwei Blöcke $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ mit $O_1 \subseteq L_1$ und $O_2 \subseteq L_2$. Nehmen wir an, es gelte $L_1 \neq L_2$. Dann ist $\langle O_1 \rangle \cap \langle O_2 \rangle \subseteq \langle L_1 \rangle \cap \langle L_2 \rangle$ eine Gerade im Widerspruch zu Axiom (C2).
H2: Sei H eine Hyperebene, die zwei verschiedene Punkte $x, y \in V$ enthält. Dann schneidet H den elliptischen Raum $\xi(x,y)$ mindestens in einem $2-$Raum. Dieser schneidet das Ovoid $\xi(x,y) \cap V$ in einem Oval.

H3: Seien L_1 und L_2 zwei in der Hyperebene H enthaltene Blöcke und sei $x := L_1 \cap L_2$. Dann enthält H nach Axiom (C3) und Bemerkung 3.1.2(5) auch den Tangentialraum
$T(x) = \langle T_x(L_1), T_x(L_2) \rangle$. Sei $y \in V \cap H$, dann ist $y \in L(x, y) \subseteq \langle y, T_x(L(x, y)) \rangle \subseteq H$.
H4: Ist Bestandteil der Definition einer $(8, 3)-$Ovoidebene. $\square$

KAPITEL 7

Ausblick

Was bleibt noch zu tun? Sowohl bei der Charakterisierung von Veronesemannigfaltigkeiten als $(n,k)-$Caps, als auch bei der Charakterisierung von $(n,k)-$Caps als Ovoidräume gibt es Ansatzpunkte, um weiter zu denken.

7.1. Charakterisierungen von Veronesemannigfaltigkeiten als $(n,k)-$Caps

Das vermutlich interessanteste Ergebnis dieser Arbeit ist Satz 3.4.2. Bei diesem stellt sich sofort die Frage nach der Bedingung an $\mathbb{K}$, nur zwei Quadratklassen zu besitzen. Diese Bedingung ist nicht notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt:

7.1.1. Veronesemannigfaltigkeiten über Unterkörpern der reellen Zahlen. Ein Beispiel für eine Veronesemannigfaltigkeit über einem Körper mit mehr als zwei Quadratklassen, erhalten wir wie folgt:
Sei $\mathbb{K}$ ein echter Unterkörper der reellen Zahlen. Sei $\mathbb{F}$ die von $\mathbb{K}$ induzierte Unteralgebra der komplexen Zahlen, der Quaternionen oder der Oktaven. Dann liefert die Einschränkung der gewöhnlichen Konjugation eine Involution und wir können wie in Abschnitt 3.3 die Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{F}}$ definieren. Diese ist natürlich ein $(n,k)-$Cap, und $\mathbb{K}$ hat mehr als zwei Quadratklassen.

Wenn wir uns auf den Quaternionenfall beschränken, sind in jedem $(n,k)-$Cap die Blöcke Quadriken, die zu einer Quadrik mit Gleichung $x_4x_5 = x_0^2 - r_1x_1^2 - r_2x_2^2 - r_3x_3^2$ äquivalent sind. In den gerade beschriebenen Beispielen mit $\mathbb{K} \leq \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $r_1 = r_2 = r_3 = -1$, und damit liegen $r_3 = -1$ und $-r_1r_2 = -1$ in derselben Quadratklasse von $\mathbb{Q}$.
Mit Lemma 4.6.10 folgt, dass jedes $(n,k)-$Cap, dessen Blöcke derartige, zueinander linear äquivalente Quadriken sind, zu einer Veronesemannigfaltigkeit äquivalent ist. Eine gute Verallgemeinerung von Satz 3.4.2 wäre also ein Kriterium, wann r_3 und $-r_1r_2$ in der selben Quadratklasse von $\mathbb{K}$ liegen.
Das ideale Ergebnis wäre natürlich, dass jedes $(n,k)-$Cap diese Bedingung erfüllt. Die Vermutung, dass diese Aussage stimmt ist nicht abwegig, es ist kein Gegenbeispiel bekannt und für $k \leq 3$ ist sie wahr, wie von J. Schillewaert und H. Van Maldeghem in **[SM2]** gezeigt wurde.

7.1.2. Der Versuch einen Oberkörper von $\mathbb{K}$ zu verwenden. EIn Ansatz eines allgemeinen Beweises ist, zu einem $(n,k)-$Cap $(X,\mathcal{L})$ über einem Körper $\mathbb{K}$ einen Oberkörper $\mathbb{L}$ von $\mathbb{K}$ zu konstruieren, der nur zwei Quadratklassen hat. Dann benötigen wir ein $(n,k)-$Cap in $P_n\mathbb{L}$, das $(X,\mathcal{L})$ als Untercap enthält. Haben wir ein solches, gibt es eine $\mathbb{L}-$Algebra $\mathbb{E}$ mit einer Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{E}}$, die zu dem $(n,k)-$Cap in $P_n\mathbb{L}$ äquivalent ist. Dann sollte es durch Einschränkung der Äquivalenz auf $(X,\mathcal{L})$ gelingen, eine zu $(X,\mathcal{L})$ äquivalente Unterveronesemannigfaltigkeit von $V_{\mathbb{E}}$ zu erhalten.
Ein Problem bei diesem Ansatz ist, die Existenz eines Obercaps von $(X,\mathcal{L})$ über $\mathbb{L}$ zu beweisen. Dabei stört insbesondere, dass eine Quadrik, die über $\mathbb{K}$ keine Gerade enthält, dies über $\mathbb{E}$ durchaus könnte, und dann kein Ovoid mehr wäre. Es folgt ein Beispiel, welches das Problem verdeutlicht:

Unser Grundkörper sei $\mathbb{Q}$, der Körper der rationalen Zahlen. Dann sind $2,3,-6 \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q}^2$, und das Polynom $p(x_0,x_1,x_2,x_3) := x_0^2-2x_1^2-3x_2^2+6x_3^2$ hat keine nicht-trivialen Nullstellen in $\mathbb{Q}^4$. Also existiert nach Lemma 4.6.10 die verallgemeinerte Quaternionenalgebra $\mathbb{F}(2,3,-6)$ und die Veronesemannigfaltigkeit $V_{\mathbb{F}(2,3,-6)}$. Diese ist ein $(14,5)-$Cap über $\mathbb{Q}$. Eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, die nur zwei Quadratklassen hat, bilden die reellen Zahlen. Über $\mathbb{R}$ hat $p(x_0,x_1,x_2,x_3)$ aber die nicht-triviale Nullstelle $(\sqrt{2},1,0,0)$, also ist die von $x_4x_5 = p(x_0,x_1,x_2,x_3)$ induzierte Quadrik kein Ovoid. Damit fällt uns kein Obercap von $V_{\mathbb{F}(2,3,-6)}$ in die Hände, obwohl wir bereits wissen, dass $V_{\mathbb{F}(2,3,-6)}$ eine Veronesemannigfaltigkeit ist.

7.2. Charakterisierungen von $(n,k)-$Caps

Im Kapitel 6 stellt sich natürlich die Frage, ob es auch für $k > 3$ handliche Charakterisierungen von Ovoidräumen durch Schnitte gibt. Dies wird besonders dann interessant, wenn gezeigt werden kann, dass alle Ovoidräume Veronesemannigfaltigkeiten sind.
Dazu müssen wir die Ergebnisse aus Kapitel 5 insofern verallgemeinern, dass wir zeigen, das jede Ovoidebene normal ist. Das ist für beliebige k deutlich schwerer einzusehen, als im Fall $k = 3$. Das schwierigste dabei ist, Axiom 5.2.4, also dass drei sich nicht in einem Punkt schneidende Blöcke mindestens eine Hyperebene aufspannen, als Lemma zu beweisen. Im Fall $k = 3$ ist das einfach, wir erläutern kurz den Beweis aus [**CTM**]:
Seien L_1, L_2, L_3 drei Blöcke, die sich in drei paarweise verschiedenen Punkten schneiden. Wir zeigen, dass $H := \langle L_1, L_2, L_3\rangle$ eine Hyperebene ist, indem wir einen Punkt $x \in X\backslash(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ wählen und zeigen, dass $\langle H, x\rangle = \langle X\rangle$ gilt. Dazu wählen wir einen weiteren Punkt $y \in X$ und bilden den Verbindungsblock $L(x,y)$. Falls dieser keinen der Schnittpunkte $L_i \cap L_j$ enthält, schneidet er H in einem $2-$Raum E. Damit ist $y \in L(x,y) \subseteq \langle E, x\rangle \subseteq \langle H, x\rangle$. Falls $L(x,y)$ einen der Schnittpunkte $L_i \cap L_j$ enthält, verwenden wir eine einfache Hilfskonstruktion, um das gleiche Argument erneut anzuwenden.
Das Argument versagt jedoch bei $k > 3$, denn dann ist $\langle L(x,y)\rangle$ ein $k-$Raum, $\langle E, x\rangle$ aber immer noch nur ein $3-$Raum, der $L(x,y)$ daher nicht enthalten kann.
Falls kein Ersatz für dieses Argument gefunden wird, bleibt noch der Versuch, ohne dieses Ergebnis zu zeigen, dass jeder Ovoidraum ein $(n,k)-$Cap ist.

Literaturverzeichnis

[BK] R.H.Bruck und E. Kleinfeld: The structure of alternative divisons rings, Proc Natl Acad Sci U S A. 1951 February; 37(2): 88-90.

[Bu] F.Buekenhout: Ensembles quadratiques des espaces projectifs, Math. Zeit., 110 (1969), 306-318

[CTM] B.N. Cooperstein, J.A. Thas, H. Van Maldeghem: Hermitian Veroneseans Over Finite Fields, Forum Math. 16 (2004), 365-381

[Fau] C.-a. Faure: An Elementary Proof of the Fundamental Theorem of Projective Geometry, Geometriae Dedicata 90(2002), 145-151.

[FM] E. F. Dentice, G. Marino: Classification of Veronesean caps. Discrete Mathematics 308(2-3)(2008): 299-302

[SM1] J. Schillewaert, H. Van Maldeghem: Quadric Veronesean Caps, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin Volume 20, Number 1 (2013), 19-25

[SM2] J. Schillewaert, H. Van Maldeghem: Hermitian Veronesean Caps, Springer Proceedings in Mathematics 12 (2012), 175-191.

[TM1] J.A. Thas, H. Van Maldeghem: Classification of finite Veronesean caps, Department of Pure Mathematics and Computer Algebra, Ghent University, Galglaan 2, 9000 Gent, Belgium

[TM2] J. A. Thas, H. Van Maldeghem: Some Characterizations of Finite Hermitian Veronesean, Designs, Codes and Cryptography, 34 (2005), 283-293.

[Be] A. Beutelspacher, U. Rosenbaum: Projektive Geometrie, Vieweg Studium 41, Braunschweig/Wiesbaden, 1992

[HP] D.Hughes, F.Piper: Projective planes, Springer-Verlag: New York Heidleberg Berlin, 2. Auflage, 1982

[Lu] H. Lüneburg: Translation Planes, Springer-Verlag: New York Heidelberg Berlin, 1980

[Pi] G. Pickert: Projektive Ebenen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, zweite Auflage, 1975

[RW] M.Roczen, H.Wolter: Lineare Algebra inviduell, Online-Fassung, Band 2, Lulu Enterprises, USA, 2000

[Sa] H. Salzmann, D. Betten, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, M. Stroppel: Compact Projective Planes, De Gruyter Expositions in Mathematics 21, Berlin New York, 1995

[SGHL] H. Salzmann, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen: The Classical Fields, Cambrige university press, 2007